

平成21年 5月 20日現在

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2007～2008  
 課題番号：19740030  
 研究課題名（和文） 双曲空間の等長写像から成る離散群の一般的基本多面体の存在証明と、その視覚化  
 研究課題名（英文） A proof of existence of generic fundamental polyhedra for discrete isometry groups of hyperbolic space, and its visualization  
 研究代表者  
 牛島 顕 (USHIJIMA AKIRA)  
 金沢大学・数物科学系・准教授  
 研究者番号：50323803

研究成果の概要：三次元双曲多様体内の点に対し、そこを中心とするディリクレ多面体を考える。このとき、殆ど全ての点に対し、得られる多面体が「一般的」と呼ばれる形となる事が予想されている。二次元の場合には、この予想は肯定的に解決されている。本研究では、この予想を解く為の予備的研究として、三次元の場合にも適用可能な証明の方針に基づく、二次元の場合の別証明を与えた。更に、中心が無限遠境界内にある場合に、同様の結果が得られるかどうかに関しても、研究も行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	0	1,900,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,200,000	390,000	3,590,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何、双曲幾何学、離散群

## 1. 研究開始当初の背景

Thurstonによる幾何化予想に端を発し、三次元多様体内、双曲的であるものは豊富に多様体を含んでいる事が分かっている。また二次元双曲多様体、即ち双曲曲面の場合には、与えられた曲面が許容する双曲構造全体は「タイヒミュラー空間」と呼ばれる多様体を成し、これは一変数函数論とも密接に関係して活発に研究されている対象である。

多様体を研究する際、その次元が3である場合ですら、ユークリッド空間内に直接実現

する事は一般には出来ない。三次元双曲多様体やタイヒミュラー空間でも同じ問題が生じる為、これらの対象を目に見える形で理解する為の方法が開発されてきた。単体的複体や Dehn surgery による表示などはよく知られている方法である。

その他によく知られている方法の一つとして、多様体を切り開き、元の対象を三次元空間において認識出来る図形及びそれらを貼り合わせる写像という、二つの情報に分けて理解するというものがある。その切り分け方には様々な方法があり、例えばバガード分

解はその一つである。ここでは、双曲多様体に対してよく用いられるもの一つである、ディリクレ基本多面体と呼ばれるものに注目する。これは、多様体内に点を指定し、多様体に対応する離散群（クライン群）による、その点の軌道に対する等距離集合として得られる凸多面体で、ポロノイ図とも呼ばれる対象である。最初に指定した点は、ディリクレ基本多面体の「中心」と呼ばれる

この研究ではディリクレ基本多面体の内、特に「一般的」と呼ばれるものに注目する。その定義の意味する事は、ディリクレ基本多面体が一般的であるとは、その組み合わせ的な形が、中心の摂動で安定しているというものである。

一般的な基本多面体の概念は、T. Jorgensen と A. Marden による 1988 年出版の共著論文 “Generic fundamental polyhedron for Kleinian groups” 及び、A. Beardon による 1988 年出版の著書 “The Geometry of Discrete Groups” により導入された。Beardon は二次元の場合を取り扱っており、Jorgensen と Marden は三次元の場合を取り扱っている。後者がこの概念を考えた主目的は、クライン群の代数的収束と幾何的収束の差異を調べた 1990 年出版の共著論文 “Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups” の為であった。

一般的な基本多面体に対する主要な結果として、双曲三次元多様体内の殆ど至る所の点に対して、それを中心とするディリクレ基本多面体は一般的であるというものがある。これが “Generic fundamental polyhedron for Kleinian groups” に於ける主「結果」であり、その性質が “Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups” では主結果の証明に効果的に用いられている。しかし、研究代表者により、一般的なディリクレ基本多面体の中心の普遍性に関する Jorgensen と Marden の証明の一部に、不備のある事が指摘されている。

## 2. 研究の目的

本研究は、上記の証明の不備を埋める事を最終的な目的としている。これにより、一般的なディリクレ基本多面体に対する理解が深まり、より有効な取り扱いの方法が得られる事が期待される。例えば、代数的収束と幾何的収束に関し、一般的なディリクレ基本多面体を用いた証明は Jorgensen と Marden 以降には余り多いとは言えない。本研究が、この多面体の有効性を再度見直す切っ掛けとなる事も期待出来る。

また、双曲多様体内での一般的なディリクレ基本多面体に対応する点の分布を考察する事も本研究の目的である。実際には双曲多様体の被覆空間を考えるのだが、一般的なディリクレ基本多面体に対応する点の、具体的な分布に関する考察は、研究代表者の知る限り、M. Näätänen により 1985 年に出版された論文 “On the stability of identification patterns for Dirichlet regions” だけである。その為、その後に飛躍的に発展した計算機を有効に用いれば、この問題に関する新しい見地が得られるものと期待される。

## 3. 研究の方法

一般的な基本多面体に対応する中心が殆ど至る所に存在するという主張は、二次元の場合には Beardon により証明が与えられている。

本研究では、この証明が三次元の場合にも適用可能かどうかを検討する事から始めた。その結果、この証明は二次元に特有の性質、具体的には双曲平面と複素解析との関連を効果的に用いて為されている事が分かった。

そこで、逆に考え、Jorgensen と Marden により提示された三次元の場合の証明の方針を、二次元の場合に適用し、元の証明での不備な箇所がどの様に埋める事が出来るかを検討した。

これらの研究に際し、双曲空間の取り扱いに精通している研究者の協力を求め、Raquel Diaz Sanchez との共同研究として進める事となった。また Marden 本人とも連絡を取り、証明の方針等で助言を仰ぐ機会を得た。

計算機による、一般的なディリクレ基本多面体に対応する点の分布の視覚化に関しては、本研究期間内では具体的な進展は得られなかったが、この分野に詳しい研究者の知己を得る事が出来た。本研究に引き続く研究では、計算機を用いた研究の進展の為に、新たに共同研究を立ち上げている。

## 4. 研究成果

本研究の研究成果として二つの項目を挙げ、更に今後の展望を記す。

(1) 上記の研究方法に従い、双曲曲面に対して、一般的なディリクレ基本多面体の中心となる点が殆ど至る所に存在する事の別証明を、Jorgensen と Marden による証明の方針に従って与える事が出来た。

これは、先に述べた様に Diaz との共同研

究であるが、共同で研究をした成果として、お互いに異なる証明を与える事が出来た点にある。研究代表者による証明は、Beardonによる証明をより精密にする事により Jorgensen と Marden による証明の方針に適用出来る形にしたものである。また Díaz による証明は、射影幾何学を用いた全く新しいものである。

(2) 研究代表者と Díaz による二通りの証明方法が、三次元の場合の問題を解決する際にどの様に有効であるかは、今後の研究課題である。

その第一歩として、ディリクレ基本多面体の中心を無限遠境界から取って来た場合を考えた。この場合はもはや双曲曲面内の点ではないのだが、被覆空間内での極限操作によりディリクレ基本多面体に当たるものを定義する事が出来、それに対して「一般的」であるという性質をこれまでと同様に定義する事が出来る。

Beardon による結果では、この様な場合は考える事が出来ない。しかし Jorgensen と Marden による証明の方針に従うと、この様な場合にも、一般的なディリクレ基本多面体の中心となる点が、無限遠境界に於いて殆ど至る所に存在する事を示す事が期待出来る。

そこで、Díaz との共同研究の次の目標として、我々が得た新たな証明を無限遠境界から点を取って来た場合に適用し、Jorgensen と Marden による証明の方針に従い、上記の結果が証明可能かを確かめる研究を進めた。

本研究期間内には細部を詰めるまでには至らなかったが、議論の結果、証明の方針を得る事が出来た。本研究に引き続く研究に於いて、得られた証明の方針の細部を詰め、証明を完成させる事を目指している。

(3) 今後の研究に於いては、上記に述べた証明の完成を目指す事の他、本研究の最終目標である三次元の場合の一般的なディリクレ基本多面体の存在定理の証明を目指したい。

それと共に、計算機による視覚化を進め、それを用いた新たな研究についても進めていきたい。例えば、一般的ではないディリクレ基本多面体に対応する中心からなる集合により双曲多様体は切り分けられるが、その補集合は常に単連結であろうという予想がある。実際、Näätänen による実験は、この予想を支持している。この様な予想を証明する際のアイデアを得る為には、計算機による分布の可視化が非常に有効であろうと期待される。その為に、今後の研究では、計算機による基本多面体や、より踏み込んで双曲幾何とその離散群の取り扱いに関しても考察していきたい。

更に、一般的なディリクレ基本多面体を用いた、双曲多様体そのものの研究も進めていきたい。先に述べた様に、この様な多面体は代数的収束と幾何的収束との差異を見る為に導入されたものであり、研究代表者の知る限り、その他の応用は殆ど為されていない。多様体の研究手法として最近特に活発に行われているものの一つに、不変量を用いた研究がある。その際に多用される手法に、対象となる多様体を切り分けて、その細分それぞれに於いて不変量を計算し、それを足し合わせて全体の不変量を得るという方法がある。この手法と一般的なディリクレ基本多面体とを組み合わせた研究は知られておらず、この方面での研究を進める事にも意義があると言える。

そして、高次元の双曲多様体に対する同様の問題を考える事も残された課題である。一般的なディリクレ基本多面体の概念は、高次元の双曲多様体に対しても同様に定義する事が出来るが、妥当な定義を具体的に考えた研究はまだ無い。実際、双曲多様体の次元が四次元以上の場合は、三次元の場合と比べると研究成果がまだ少ない。そこで、高次元の場合の一般的なディリクレ基本多面体を考える事で、この分野に貢献する事が期待出来る。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

(1) 生島 顕, Raquel Diaz (論文名) On the properness of some algebraic equations appearing in Fuchsian groups, Topology Proceedings, 33 巻 1-26, 2009, 査読有

[学会発表] (計3件)

(1) 生島 顕 (標題) Generic Ford regions for Fuchsian groups, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2009. 1. 10, 大阪大学

(2) 生島 顕 (標題) 双曲曲面の一般的基本多角形の普遍性, 日本数学会 2008 年度 秋季総合分科会, 2008. 9. 26, 東京工業大学

(3) Raquel Díaz Sánchez (標題) On generic fundamental polyhedra of Kleinian groups, 22nd Summer Conference on Topology and Its Applications, 2007. 7. 27, Universidad

Jaume I Castellón, Spain

6. 研究組織

(1) 研究代表者

牛島 顕 (USHIJIMA AKIRA)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：50323803

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

研究者協力者

Raquel Díaz Sánchez

Profesor Contratado Doctor

Universidad Complutense Madrid