様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 24 日現在

機関番号：13901
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2007～2010
課題番号：19740032
研究課題名（和文）
クライン群の変形空間への等角幾何的アプローチ
研究課題名（英文）
Deformation spaces of Kleinian groups and conformal geometry
研究代表者
糸 健太郎（ITO KENTARO）
名古屋大学大学院・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00324400

研究成果の概要（和文）：
クライン群の変形空間の境界挙動について研究した．特に，穴あきトーラス群の変形空間における点列の収束・発散に関する必要十分条件を与えた．このことから空間の境界における自己接触が完全に特徴付けられる．また，この空間の複素１次元切り口としてのリニア・スライスに関して，トレースが２に収束するときの幾何極限とマスキット・スライスの関係を明らかにした．一方で，通常の３次元クライン群を４次元クライン群として変形したときの変形空間の形状に関しても研究を行った．

研究成果の概要（英文）：
I studied the boundary behavior of deformation spaces of Kleinian groups. Especially, I obtained a necessary and sufficient condition in which a sequence of punctured torus groups converges/diverges. Therefore we obtained the whole picture of the self-bumping of the space of punctured torus groups. I also revealed the relation between the Maskit slice and the geometric limit of sequences of liner slices when the associated traces tend to 2. I also studied deformation spaces of 4-dimensional Kleinian groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
総　計	2,800,000	600,000	3,400,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：クライン群 双曲幾何 離散群 リーマン面

１．研究開始当初の背景

クライン群とは双曲空間の等長写像群の離散部分群であり，クライン群による双曲空間の商空間は双曲多様体となるので，クライン群の変形空間は双曲多様体の変形空間とも見なせる．商多様体が有限体積であるときは剛性をもち変形空間が１点であるのに対して，無限体積であるときは，その変形空間の内部は商多様体の理想境界の等角構造の変形空間（すなわちタイヒミュラー空間）と同一視出来る．私が興味を持ち研究を行っているのは後者の場合である．さて，変形空間を群の表現空間に埋め込んで考えると，変形空間の内部は複素多様体

であるのだが，その境界は非常に複雑な振る舞いをすることが近年認識されるようになってきた．例えば，変形空間が幾つかの連結成分を持つ場合にはそれらの閉包が接触する現象が Anderson-Canary によって見いだされた．一方で，本質的には同じ手法を用いることにより，ただ１つの連結成分からなる場合も自己接触するという現象が McMullen によって示されている．さらには，穴あきトーラス群の変形空間は，その境界において局所連結ではないという結果が Bromberg によって得られている．穴あきトーラス群の変形空間は最も次元が低いので，一般のクライン群の変形空間の境界はより複雑であると想像出来る．この非局所連結性は自己接触の様子をより精密に観察することで得られる．

さて，以上の接触・自己接触現象において，その根底にあるのは，クライン群の列の代数極限と幾何極限が必ずしも一致しないという事実である．この事実は，Kerckhoff-Thurston によって初めて本格的に変形空間の理論に用いられた．実際，彼らが示したことは「変形空間のベアス・スライスをタイヒミュラー空間と同一視したとき，写像類群の作用はその境界に連続拡張されない」という事実である．この事実は，実は接触・自己接触よりもデリケートな現象を捉えたものになっている. 実際，

穴あきトーラス群の場合には次元が低すぎてこの現象は起こらない.

クライン群論全体を見回してみると，長い間懸案だった (i) ending lamination 予想 (ii) Marden 予想 (iii) Bers-Sullivan-Thurston 予想という３つの大予想は近年，立て続けに肯定的に解決された．とりわけ，Minsky らによって解決された (i) より，クライン群たちをその商多様体のエンドの情報で分類するという仕事が完成された．すなわち，エンド不変量の集合と変形空間の間には１：１対応が存在する．一方で，境界における複雑さは，この対応の連続性が崩れていることに起因する．従って，今後のクライン群論は，この対応の連続性・不連続性について解明していくことが重要な課題となっていくと思われる．

以上は，3 次元トポロジーと関連したクライン群論の主流に関する話題であるが，一方で，私は通常の 3 次元クライン群を 4 次元クライン群として変形したときの変形空間に関しても興味を持ち研究をしている．この場合，クライン群の極限集合は 3 次元球面の中のフラクタル集合であるので，一般次元のクライン群と異なる深い問題意識を持つことが可能である．この方向で，当研究課題を開始する以前に，私は荒木義明氏（一般企業）と共同で，穴あきトーラス群の 4 次元クライン群としての変形空間に関してある程度の結果を得ていた.

２．研究の目的

本研究の目的はクライン群の変形空間の境界挙動を等角幾何的な手法により解明することである．すなわち，境界の複雑さを示す現象たちの根底に潜んでいる原理を解明することが本研究の目的である．とりわけ，Kerckhoff - Thurston によって見いだされた「ベアス・コンパクト化の基点の取り替えに関する不連続性」が最も奥深い魅力を秘めていると思われるので，その原理の解明を目指す.

３．研究の方法

クライン群の中で, 最もシンプルかつ非自明な変形空間を持つものは１点穴あきトーラス群であり，この場合，変形空間は複素２次元空間である．変形空間を研究する上で最初に考察の対象となるのがこの空間であり，本研究もこの空間の境界挙動についての理解を深めるところからスタートする．また，コンピュータ・グラフィックスを用いた思考実験を大いに取り入れることで，研究を多角的に進める．

４．研究成果

当研究課題期間の前半は主に穴あきトーラス群の列の収束・発散に関する研究を行った．穴あきトーラス群はただ１つの連結成分を持ち，自己接触をしており，さらには Bromberg によって局所連結でないことが知られている．ここでは，これらの知識を総動員して，穴あきトーラス群の列の収束・発散の必要十分条件を求めた．この結果は 2006 年度に得られていたが，その論文 `Covergence and divergence of Kleinian punctured torus groups' の改訂と一部の証明の改良に多くの時間を費やした.（この論文は，レフェリーコメントに従って改訂した後，現在レフェリーによる 2 回目の査読中である.）この論文における主結果は「穴あきトーラス群の列の収束発散はその理想境界の挙動で完全に理解出来る」というものである．このことから，変形空間の自己接触を引き起こすのは，本質的には Anderson - Canary の手法で構成される列のみであることが分かる．従って，変形空間の境界で自己接触をしている場所も完全に記述できる．この結果の証明の中で, 当初は Brock-Bromberg による drilling theorem を用いていたのであるが, その議論の中で

厳密に証明するのが大変面倒な箇所があった．そこの議論を，巡回群の幾何極限に関

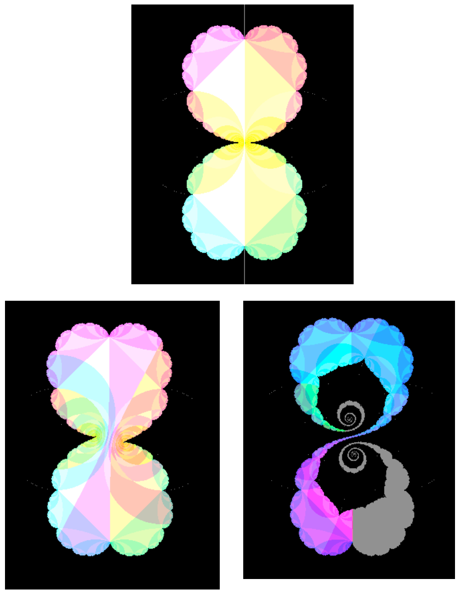
する定理を準備することで，drilling theorem を用いない，より本質的でシンプルな議論に置き換えることができたのが大きな進歩であった．この観察が以下に述べるリニア・スライスの結果にもつながった．

当研究課題期間の後半には，主に穴あきトーラス群の空間のリニア・スライスの挙動に関して研究した．いま穴あきトーラス群の空間は複素２次元であり，群の生成元のトレースの値を固定するごとにリニア・スライスと呼ばれる複素１次元の切り口が定まる．特にトレースが２のときのリニア・スライスはマスキット・スライスと呼ばれ，穴あきトーラスのタイヒミュラー空間としてよく知られているものである．ここではトレースを２に近づけたときにリニア・スライスがマスキット・スライスにどのように近づくかを調べ，次のような結果を得た：「リニア・スライスがマスキット・スライスに幾何収束する必要十分条件はトレースが２に horocyclic に近づくことである．特に，トレースが２に tangential に近づくときはリニア・スライスの幾何極限はマスキット・スライスの真部分集合となり，この集合はマスキット・スライスの平行移動による重ね合わせで得られる．」

上の結果は，次の意味で Bromberg による変形空間の非局所連結性と深い関係にある．Bromberg は変形空間に新たな座標を導入することで，この非局所連結性を示している．私はこの座標が，生成元のトレースを用いた座標に非常に相性がいいことを見出した．この観点より，Bromberg の証明はより見通しのよいものになる．Bromberg の結果がこの座標の「縦の」切り口に注目しているとすると，私の結果は「横の」切り口に注目することで得られる．

さて，リニア・スライスは１つの生成元のトレースを固定したものだが，これは生成元の複素移動距離を固定するのと同じである．このことから，トレースによる座標やリニア・スライスの現象は，複素 Fenchel-Nielsen 座標や複素地震の言葉で書き直すことができる．このとき，上述の私の結果は，Parker-Perkonnen の FN 座標の結果や McMullen の複素地震に関する結果の複素化と見なすことができる．実際，彼らがトレースを実軸上から２に近づけたときのことを観察しているのに対して，私は一般の複素数が２に近づく場合を明らかにしたのである．

次に，リニア・スライスとコンピュータ・グラフィックスの関係について述べる．和田昌昭氏（阪大）が作成したリニア・スライスを描かせるコンピュータ・プログラム(OPTi)があるのだが，上述の結果に気づいたのは，何気なく OPTi を操作していたときであった．下の図はこのプログラムで描かせたリニア・スライスで，上段がマスキット・スライス，下段左はトレースが２に horocyclic に近い場合，右は２に tangential に近い場合である．この図より，トレースが２に tangential に近づくとき，リニア・スライスはマスキット・スライスの部分集合に幾何収束する様子が見て取れる．ここで，改めて思考実験の道具としてのコンピュータの有用性を実感した．



さらに，リニア・スライスの研究を行う上で，様々なスライスを自在に描く必要性が生じて，佐久川恵太氏（明治大学博士過程）と共同でそのようなプログラムを開発した．このプログラムは，結果の正しさを実感したり，新たな問題意識を得る上で大変重宝した．

一方で，４次元クライン群に関する研究も行った．この研究は主に佐久川恵太氏と共同で行った．この課題以前は，放物的元は変形後も回転成分が無いという仮定のもとで研究していたが，彼によって放物的な元が４次元クライン群の中で変形後は回転成分を持ちうるという認識を与えられたので，主に回転成分を持ちうる最もシンプルな状況として２元生成ショットキー群の変形を考えた．特に，変形のパラメータの個数や正規化，何を問題とするかについて多くの議論を行ったが，論文を書くまでには至らなかった．

以上をまとめてみると，この課題期間中は，穴あきトーラス群の変形空間の研究に特化していたと言える．４年前までは全く明らかでなかったいくつかの事実を解明することが出来て大変満足している．残念ながら，最終目標の Kerckhoff-Thurston の現象の解明

には至らなかったが，その目標に向かって一歩一歩前進しているという手応えは感じている.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Kentaro Ito, Yoshiaki Araki, `An extension of the Maskit slice for 4-dimensional Kleinian groups', Conform. Geom. Dyn. 12 (2008), 199-226. 査読有り
② Kentaro Ito, `On continuous extension of grafting maps', Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 3731—3749. 読有り
③ Kentaro Ito, `Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space, II', Duke Math. J. 140 (2007), 85-109. 査読有り

〔学会発表〕（計 7 件）

① 糸 健太郎, `Linear slices close to a Maskit slice', Hyperbolic Geometry and related topics, 2010 年 9 月 15 日, Korean Institute of Advanced Science.
② 糸 健太郎, `Linear slices close to a Maskit slice', Workshop on Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, 2010 年 7 月 30 日, National University of Singapore.
③ 糸 健太郎, `Linear slices and the complex Fenchel-Nielsen coordinate of the punctured torus space', 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数論分科会, 2010 年 9 月 22 日, 名古屋大学.
④ 糸 健太郎, `Linear slices close to a Maskit slice', 日本数学会 2010 年度年会函数論分科会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学.
⑤ 糸 健太郎, `Linear slices of Kleinian punctured torus space close to a Maskit slice', 「リーマン面・不連続群」研究集会, 2010 年 1 月 9 日, 名古屋大学.
⑥ 糸 健太郎, `穴あきトーラス群の擬フックス群空間について', 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会函数論分科会特別講演, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学.
⑦ 糸 健太郎, `Topology of quasifuchsian space of once-punctured torus', Workshop on infinite dimensional Teichmuller space and moduli space, 2007 年 11 月 21 日, 京都大学数理解析研究所.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者

糸 健太郎（ITO KENTARO）
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
研究者番号：00324400

(2)研究分担者 なし