

平成22年 5月20日現在

研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19740038
 研究課題名（和文） ホモトピー代数の幾何学、及び幾何学の変形問題への応用
 研究課題名（英文） Applications of homotopy algebras to geometry and its deformation problems
 研究代表者
 梶浦 宏成 (KAJIURA HIROSHIGE)
 千葉大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号：30447891

研究成果の概要（和文）：シンプレクティック多様体の中のラグランジュ部分多様体達から成る圏である深谷圏の研究を行い、平面上の直線達をラグランジュ部分多様体とする深谷圏の A_∞ 構造を完全に、かつ具体的に構成した。また、幾何学を記述するための一般的な道具である A_∞ 圏と三角圏の間の関係について研究し、 A_∞ 増強の一意的でない三角圏の例を構成した。

研究成果の概要（英文）：We studied Fukaya categories which are categories consisting of Lagrangian submanifolds in symplectic manifolds. We constructed an A_∞ -infinity structure in the Fukaya category of lines in a plane completely and explicitly. Also, we studied relations between A_∞ -infinity categories and triangulated categories which are general tools to describe geometry. We constructed an example of triangulated categories whose A_∞ -infinity enhancements are not unique.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,000,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	600,000	3,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学，トポロジー，代数学，数理物理，素粒子論

1. 研究開始当初の背景

(1) 解析力学（量子力学の出発点）の基礎を与えるシンプレクティック多様体と呼ばれる幾何学的な空間に関する研究対象の1つとして、シンプレクティック多様体の中のラグランジュ部分多様体の成す圏である深谷圏がある。深谷圏はシンプレクティック幾

何学やそれを含む微分幾何学のみならず、ミラー対称性とその圏論的定式化であるホモロジー的ミラー対称性予想を通じて複素多様体論、代数幾何学などを含めた幾何学の間をまたがる研究対象となっている。

深谷圏は物理学におけるある位相的弦理論の、ループを含まない開弦の理論の数学的

定式化とみることもできる。一般にそのような開弦の理論は A_∞ 構造を持つことが知られている。実際原論文(Fukaya (1993))において、深谷圏は A_∞ 圏として定められるべきであることが議論されている。しかし深谷圏を完全に A_∞ 圏として定めることはラグランジュ部分多様体の横断正則性の問題と絡んでいて技術的には非常に難しいことが分かってきた。最近このための基礎理論として、1つのラグランジュ部分多様体上の A_∞ 構造の定式化が深谷 - Oh - 太田 - 小野によって行われたが、完全な A_∞ 構造の具体的記述に関しては例がほとんどない状況にあった。

(2) 幾何学とは何らかの空間を研究するものであるが、主にある種の構造付きの空間が研究対象となる。構造付きの空間(多様体)とは、一般相対性理論の基礎理論でもある(擬)リーマン多様体に加え、シンプレクティック構造を持つ多様体であるシンプレクティック多様体、複素構造を持つ多様体である複素多様体などがある。物理学、特に超共形弦理論と位相的弦理論の研究において、シンプレクティック多様体と複素多様体の間の不思議な双対性が発見された。つまり、あるシンプレクティック多様体に対し、それと等価な様々な性質を持つ複素多様体が存在し、またその逆の事実も存在するというものである。この対応を2回たどるともとのシンプレクティック多様体、あるいは複素多様体に戻ることから双対性と呼ばれている。このミラー対称性の圏論的定式化として、ホモロジー的ミラー対称性予想というものがKontsevich(1994)によって提唱されている。これはシンプレクティック多様体上の深谷圏とミラー双対な複素多様体上の連接層の成す導来圏の圏同値性を主張するものであり、それが「不思議な双対性」であるミラー対称性の定式化の1つであるだけでなく、ミラー対称性の根本的理解を与えるものとして期待されている。

このホモロジー的ミラー対称性の定式化の際、 A_∞ 圏として定められるべきものである深谷圏と、三角圏である連接層の導来圏を比べる必要がある、そのために A_∞ 圏から三角圏を構成する方法も提案されている。より正確には、もともとの A_∞ 圏から三角構造を持つ(より大きい) A_∞ 圏を定めることができ、そのゼロ次のコホモロジーとして三角圏が得られる。これによって両者の圏の三角圏としての同値性を論じるのが現在ホモロジー的ミラー対称性の主な定式化の1つとなっている。

この三角構造を持つ A_∞ 圏から三角圏を得る際、原理的には重要な情報の一部が失われることが予想される。つまり、(ゼロ次の)

コホモロジーをとるという操作は、もともとの構造から主要ではあるが一部分を抽出するという操作である。しかしながら実際に情報が失われるという事実を示す具体例は知られていない状況にあった。

2. 研究の目的

(1) 深谷圏の A_∞ 構造を簡単な例において具体的に構成することを目的とした。

今までは横断正則性の問題のないラグランジュ部分多様体達に対して定められる部分的な A_∞ 積の具体形について議論されてきたが、その場合残りの部分を含めて完全に A_∞ 構造を定めることができることが保証されていない。一方、一般論として、横断正則性の問題を含めて深谷圏の A_∞ 構造の存在は示されつつある。実際1つのラグランジュ部分多様体上の A_∞ 構造の存在性に関する理論が前述の研究者達によって構築され、それが深谷圏の A_∞ 構造の存在を示すための本質的な部分であると思われる。しかしこの一般論においては、横断正則性の問題のないラグランジュ多様体達に対して明快な形で議論されてきた A_∞ 積の定義を一旦「壊す」ことになる。

この2つの問題、つまり横断正則性の問題のないラグランジュ部分多様体達に対して定まる具体的な A_∞ 積を保つことと、全体の A_∞ 構造の存在をいうことを両立させることがこの研究の目的である。

(2) 三角構造を持つ A_∞ 圏は、そのゼロ次のコホモロジーとして定まる三角圏の A_∞ 増強と呼ばれる。つまり問題は、 A_∞ 増強を持つ三角圏に対し、その A_∞ 増強は一意的であるかどうかということである。直感的には一意的でないように思われるがそのような例がないことにはそう言い切ることはできない。そのようなわけで、 A_∞ 増強が一意的でない三角圏の例を探すことにした。

3. 研究の方法

(1) 横断正則性の問題が難しい深谷圏に対し、それと同値な A_∞ 圏構造を持つと期待されていて横断正則性の問題のない別の圏を定式化し、その別の圏から A_∞ 構造を深谷圏に移植する手段をとる。その過程で部分的に、Kontsevich-Soibelman(2000)の議論に基づいた深谷圏とモースホモトピーの圏(深谷 - Oh(1993))の間の同値性のある一般化を使う。 A_∞ 構造を移植する方法としては A_∞ 代数のホモロジー的摂動理論と呼ばれる一般論

が存在し、それを応用する。

(2) A_∞ 増強が一意的でない三角圏の構成は存在するとすれば手で一步一步探すしかないと思われた。より具体的には、 A_∞ 積のうちどの部分が三角圏の積構造に含まれるかを解析し、同じ三角圏の積構造を定める2つの A_∞ 圏が同値であるかどうかを議論することとなる。そのようにして探していくうちにあまりにも様々な例で A_∞ 増強が一意的になるならば、一般に、あるいはかなりよい仮定のもとで A_∞ 増強が一意的であることを示す必要があるとも考えた。この場合は、一意的である理由が存在するわけであるので何か一般的な定理を示す必要があると考えていた。

4. 研究成果

(1) 平面上の直線達をラグランジュ部分多様体とした場合について、その上の A_∞ 構造を完全に、かつ具体的に構成して研究目的をひとまず達成し、後述の論文③にまとめた。これを直接応用することによってトーラス上の深谷圏の A_∞ 構造を具体的に構成することもできる。

国内外を問わず、このような具体的な形で深谷圏の A_∞ 構造が記述されていた例はない。トーラスの場合には、有限個の直線から成る A_∞ 部分圏を考えるとそれが深谷圏から構成される有限次元 A_∞ 代数の例となることも興味深い。

一方、今後の応用としては、高次元化、一般のシンプレクティック多様体の場合への拡張が考えられるが、これらに関しては今得られた結果が直接一般化できるわけではなく、重要であるがさらに困難な問題として残されている。

(2) 研究目的通り、 A_∞ 増強の一意的でない三角圏の例を構成した。この例はかなり複雑であり、一般に A_∞ 増強が一意的である理由はないことが示されたことにはなるが、同時にかなり広いクラスの三角圏において A_∞ 増強が一意的となることも分かった。例えばホモロジー次元の有限な有限次元代数の加群の導来圏の A_∞ 増強は一意的となる。

今回得られた例が今まで知られていないものであることは言うまでもないが、現在この分野において一般論の上に一般論が積み重ねられていく傾向にあり、実際に我々が何を定式化すべきかということをはっきりさせるためにもこのような例を構成していくことが重要であると思われる。

この結果は、一般にホモロジー的ミラー対称性の定式化としては深谷圏と接続層の導来圏を三角圏として比べるのは情報が落ちていて不十分であるということの意味する。一般に接続層の導来圏は A_∞ 圏の特別な場合であるDG圏の構造を持つため、両者を A_∞ 圏のレベルで比べるべきであるということになる。一方、三角圏自体は、表現論などでも現在活発に応用されている重要な概念であり、 A_∞ 圏に対し、一旦それから得られる三角圏を研究するという立場もあり得る。さらに、ホモロジー次元の有限な有限次元代数の加群の導来圏をはじめとする、三角圏をとっても情報を失わない A_∞ 圏、つまり A_∞ 増強が一意的な三角圏のクラスを決定していくことも今後の重要な問題であると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Hiroshige Kajiuura, An A -infinity structure for lines in a plane, International Mathematical Research Notices, 査読有, 20 巻, 2009, 3913–3955
- ② Hiroshige Kajiuura, Kyoji Saito, Atsushi Takahashi, Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with $\epsilon = -1$, Advances in Mathematics, 査読有り, 220 巻, 2009, 1602–1654
- ③ Hiroshige Kajiuura, Jim Stasheff, Homotopy algebra of open-closed strings, Geometry & Topology Monographs, 査読有, 13 巻, 2008, 229–259
- ④ Yoshiaki Maeda, Hiroshige Kajiuura, String theory and deformation quantization, Sugaku expositions, 査読無, 20 巻, 2007, 191–214

[学会発表] (計1件)

- ① Hiroshige Kajiuura, On A -infinity enhancements for triangulated categories, Joint meeting of the Korean Mathematical Society and the American Mathematical Society, December 19, 2009, Ewha womens university in Seoul, Korea.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梶浦 宏成 (KAJIURA HIROSHIGE)

千葉大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：30447891