様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2007～2008
課題番号：19740041
研究課題名（和文）　カンドルとコバノフ理論を用いた曲面結び目の研究

研究課題名（英文）　Research of surface-knots using quandles and Khovanov theory

研究代表者
田中　心(TANAKA　KOKORO)
東京学芸大学・教育学部・講師
研究者番号：70448950

研究成果の概要：平成 19 年度は，京都大学数理解析研究所(現 筑波大学)の石井敦氏と「コバノフ理論の仮想絡み目への拡張」に関する共同研究を行った．宮澤多項式の変数の情報をうまく用い，その困難を克服した．平成 20 年度は，ウィリアムカレッジの Colin Adams 氏・大阪市立大学数学研究所の新庄玲子氏の両氏と「結び目図式の補領域」に関する研究を行った．結び目図式が，二次元球面をいくつかの多角形領域に分割することに注目し，成果を得た．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,600,000	240,000	1,840,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何，曲面結び目，カンドル，コバノフ理論

１．研究開始当初の背景

曲面結び目の図式的な性質に関して，研究開始当初の背景を述べる．

(1)まず，最小三重点数に関わる背景について述べる．

最小三重点数とは，同じ曲面結び目を表す図式の中で三重点の個数の最小値として定義されるものであり，さまざまな研究がなされていた．最小三重点数が 0 であるような曲面絡み目は擬リボン曲面絡み目と呼ばれており，無限に存在する事が知られていた．また Satoh により，最小三重点数が 1 であるような曲面絡み目は存在しない事や，最小三重点数が 2 や 3 であるような球面結び目は存在しない事が示されていた．

そのような状況下で，「最小三重点数が 2 又は 3 であるような曲面結び目(或いは曲面絡み目) は存在するのか？」という問題が，解決すべき問題のうちの一つであった．

一方，最小三重点数が具体的に決定されている例はまだほとんどなく，Satoh-Shima らによる次の二つの結果のみであった．それは，2 ツイストスパン三葉結び目の最小三

重点数が 4 であるという結果と，3 ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数が 6 であるという結果である．彼らはコサイクル不変量を用いてこれらの事実を示したが，その中でコサイクル不変量が非自明であるという事に注目していた.

そのような状況下で，次が解決すべき問題として考えられた.

①n>3 の時，n ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数は 2n か？

②奇数 p>3 に対して，2 ツイストスパン(2,p)トーラス結び目の最小三重点数は 2(p-1)か？

一つ目の問題に於いて n=2，3 とした時，また二つ目の問題に於いて p=3 とした時は Satoh-Shima の結果と対応している．どちらの問題に対しても，上からの評価は既に Satoh や Yashiro により示されており，成立する可能性が高い状況であった.

(2)次に，Khovanov 理論と曲面結び目不変量に関する背景について述べる.

図式的な性質を調べようとする場合，あまり道具が揃っていないのが現状であり，図式と相性の良い新たな曲面結び目不変量の構成を目標とするのは自然であった．中でも特に Khovanov 理論に関わる曲面結び目不変量に注目した.

一次元結び目の不変量である Jones 多項式は，Tate 予想(交代的な結び目図式に関する予想) の解決に用いられたように結び目図式の情報をよく反映している．Jones 多項式の拡張として定義される Khovanov ホモロジーもまた，Milnor 予想(トーラス結び目の四次元種数に関する予想) の組み合わせ的な別証明を与える等，図式と相性が良い.

後に Khovanov 理論は絡み目コボルディズムに関して関手的である事が示され，その事を用いて Khovanov-Jacobsson 数と呼ばれる曲面結び目不変量が定義された．この不変量は(図式の一種である)動画法を用いて定義されており，図式的な性質を反映した不変量として期待されていたが，研究代表者自身の以前の研究に於いて，曲面結び目の種数の情報しか持っていない事が分かった．しかし，曲面絡み目に対しては意味のある情報を含んでいる可能性が残されていた.

このような状況下で，Khovanov 理論を足がかりとし，新たな曲面結び目不変量の構成を試みることは，妥当な方向性であった.

２．研究の目的

曲面結び目の図式的な性質を解明する事が大きな研究目的である．特に，三重点に関わる性質の解明と，図式を用いて定義される新たな曲面結び目不変量の構成を主な目的として研究を進めて行く.

(1)三重点に関しては，カンドルコサイクル不変量と河内絡み形式の融合を推し進める．その応用として，最小三重点数の新たな決定や非リボン曲面結び目に対するブレイド指数の評価などを目指す.

(2) 新たな不変量の構成に関しては，Khovanov 理論をその足がかりとする．これにより曲面結び目図式と相性のよい新たな不変量の構成が期待でき，曲面結び目の図式的な性質の解明がより一層進むことが期待できる.

３．研究の方法

(1)三重点に関わる性質を明らかにするという目的を果たす為，次の二つの事柄に注目した.

一つ目は，Carter 氏らによって定義されたコサイクル不変量と呼ばれる曲面結び目不変量である．コサイクル不変量は図式中の三重点の情報を用いてカンドル彩色数を拡張した不変量であり，最小三重点数と呼ばれる三重点に関わる数量的不変量と相性が良い事が知られている．実際，Satoh-Shima らはコサイクル不変量を用いて曲面結び目の最小三重点数を下から評価し，具体例に対して最小三重点数を決定している.

二つ目は，Kawauchi による曲面結び目補空間の無限巡回被覆空間に関するトージョン絡み形式を用いた研究である．彼は，擬リボン曲面結び目に対するトージョン絡み形式が消える事を示し，トージョン絡み形式と三重点に関わりがある事を指摘した．また，トージョン絡み形式を用いた最小三重点解消数の下から評価やその応用なども考察している.

コサイクル不変量は図式を用いて定義される為，組み合わせ的な側面が強いという特色があり，トージョン絡み形式は曲面結び目補空間の無限巡回被覆空間を用いて定義される為，幾何的な側面が強いという特色がある．そこで，三重点に関わる問題へのアプローチとして次のような方向性を考えた．トージョン絡み形式による手法を組み合わせ的に解釈し，コサイクル不変量による手法と関連性をもたせて研究する，或いは，コサイクル不変量による手法を幾何的解釈し，トージョン絡み形式による手法と関連性をもたせて研究するというものである.

(2)Khovanov 理論の理解を深める為，理論自体を仮想絡み目のカテゴリーまで拡張することを試みた．これは，京都大学数理解析研究所(現 筑波大学)の石井敦氏との共同研究である．

コバノフ理論とは，古典的絡み目の不変量を与えるホモロジー理論であり，ジョーンズ多項式の自然な拡張になっている．また，絡み目コボルディズムに関して関手性を持つ事も知られている．コバノフ理論を仮想絡み目に拡張する際の困難はメビウスコボルディズムの存在にある．我々は宮澤多項式の変数の情報を用いることで，その困難を克服できるのではないかと考えた．

(3)曲面絡み目に対する Khovanov-Jacobsson 数の計算を試みた．

曲面結び目の場合に，現在知られている計算方法は大きく分けて二種類存在する．一つ目は，Bar-Natan による Khovanov 理論の変種と Carter-Saito-Satoh らの手法を用いて計算する方法である．二つ目は，Lee による Khovanov 理論の変種と曲面ブレイドの標準形を用いて計算する方法である．

曲面絡み目に対して前者の手法を用いると，各成分の結ばれ方は不変量の値に本質的な影響を及ぼさない事が分かる．そこで，Khovanov-Jacobsson 数は曲面絡み目のボルディズム類の情報を持っているのではないかと予想した．曲面絡み目の Khovanov-Jacobsson 数を具体的に計算しようとする際には，後者の手法の適用を試みた．

(4)曲面結び目の図式を扱う際に，古典的結び目の図式の取り扱いも非常に重要である．その点を考慮し，結び目図式の補領域に関する研究を行った．これは，ウィリアムカレッジの Colin Adams 氏・大阪市立大学数学研究所の新庄玲子氏の両氏との共同研究である．

結び目図式は，図式が描かれている二次元球面をいくつかの多角形領域に分割するが，その際の奇数角形領域の個数や，使用されている多角形の形に注目することにした．特に，奇数変形領域をどの程度少なくできるかについて考察することにした．

４．研究成果

(1)京都大学数理解析研究所(現 筑波大学)の石井敦氏の共同研究である「コバノフ理論の仮想絡み目への拡張」に関しては，ある程度の成果を出すことができた．

コバノフ理論を仮想絡み目に拡張する際の困難の内の一つにメビウスコボルディズムの存在がある．我々は宮澤多項式の変数の情報をうまく用い，拡張されたフロベニウス代数を用いる事でその困難を克服した．

今後の課題は，ラスムッセン不変量の拡張，結び目コボルディズムに関する振る舞いの考察，曲面結び目への応用の考察などが考えられる．

(2)ウィリアムカレッジの Colin Adams 氏と大阪市立大学数学研究所の新庄玲子氏との共同研究である「絡み目図式の補領域」に関しても，ある程度の成果が得られた．

結び目図式は，図式が描かれている二次元球面をいくつかの多角形領域に分割する．その際，奇数角形領域の個数や，使用されている多角形の形に注目し，いくつかの興味深い結果が得られた．

特に，非自明な結び目は，奇数辺角形を 2 個持つ図式で表せることを示した．非自明な結び目の図式には，奇数辺角形が必ず 2 個以上現れることに注意すると，これは最良の結果と言える．その他に，使用されている多角形の形に注目した概念である universal sequence を定義し，いくつかの成果を得た．

このような考察は今までにない新しいものであり，このようなアプローチを曲面結び目にフィードバックさせることが今後重要になってくると言えよう．

(3) Khovanov 理論に関して，局所関係式に関する結果を得た．

この局所関係式は,Bar-Natan 氏により発見された三種類の関係式であり，Khovanov 理論を幾何的に解釈する際に重要な関係式である．今回，この中の一種類(の弱い形)が他の二種類で表せることを示した．また，R1 変形による不変性に関して，局所関係式を二種類のみ用いて具体的な写像を構成することもできた．

これは，コバノフ理論を用いた曲面結び目不変量の構成に関して，基本的な考察となるはずである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

①田中心，A note on CI-moves，Intelligence of Low Dimensional Topology 2006, 307--314, Ser. Knots Everything, 40 (2007), World Sci. Publ..

②田中心，Inequivalent surface-knots with

the same knot quandle, Topology Appl. 154 (2007), No. 15, 2757--2763.

〔学会発表〕(計 2 件)

①田中心, コバノフ理論の幾何的定式化に於ける局所関係式について, 日本数学会 2008 秋季総合分科会「トポロジー分科会」, 東京工業大学, [2008 年 9 月 24 日～27 日].

②田中心, CI 変形の局所変形への分解について, 日本数学会 2008 年会「トポロジー分科会」,
近畿大学理工学部, [2008 年 3 月 23 日～26 日].

６．研究組織
(1)研究代表者

田中　心(TANAKA KOKORO)
東京学芸大学・教育学部・講師
研究者番号：70448950

(2)研究分担者

(3)連携研究者