

平成 22 年 5 月 11 日現在

研究種目： 若手研究 (B)  
 研究期間： 2007 ~ 2010  
 課題番号： 19740048  
 研究課題名 (和文) アレフ 1 上の組合せ的命題の独立性と強制法理論  
 研究課題名 (英文) Independence results of combinatorics on aleph 1 and the forcing theory

## 研究代表者

依岡 輝幸 ( YORIOKA TERUYUKI )

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号： 60432192

研究分野：公理的集合論

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：公理的集合論、強制法

## 1. 研究計画の概要

カントールが提唱した連続体仮説が、集合論の公理系 ZFC から独立であることが証明されて以来、集合論の発展とともに、様々な数学的命題が ZFC と独立であること、すなわち “ZFC から証明も反証もされないこと” が証明されてきた。ZFC が確立されてから、最小の不可算 (非可算) 濃度アレフ 1 上の組合せ論は多くの集合論者に研究されてきており、ルベーク測度やベールのカテゴリーに関する実数の集合族の組合せ的性質や、 $(\mathfrak{P}(\omega), \text{Fin})$  上の組合せ的性質、一般位相空間論の発展に役立ってきた。

この科学研究費補助金の研究計画は、以下の三点に分けることができる。

- (1)  $(\omega_1, \omega_1)$ -gap に関する組合せ的命題の独立性と、それに関連する Martin's Axiom の fragments の独立性。
- (2) サイズがアレフ 1 の Dowker space に関する組合せ的命題の独立性。
- (3) Pmax 強制法を応用して、アレフ 1 上の組合せ的命題の独立性を導く新しい手法を編み出す、もしくはその足がかりを作る。

## 2. 研究の進捗状況

(1) Aronszajn tree や  $(\omega_1, \omega_1)$ -gap などに関連する強制法の組合せ的性質を調べ、強制法に関する (ccc よりも強い) いくつかの性質を導入し、それらの特徴や、それらの性質を持つ強制法に制限した Martin's Axiom に関する独立命題をいくつか導きだした。この研究に関しては、3 編の論文を作成し、招待講演も行った。

(2) Rudin が構成した、Suslin tree から構成される Dowker space を調べ、その一般化

を導入した。その一般化が、いつ Dowker という性質を持つかを調べ、Martin's Axiom や Proper Forcing Axiom が成り立つときは、それらが Dowker という性質を持たないことを証明した。この研究に関して、1 編の論文を作成し、招待講演も行った。

(3) Pmax 強制法のいくつかのバリエーションを与え、それを調べた。特に、Suslin tree を一つ保存する Pmax variation と、 $(\omega_1, \omega_1)$ -gap を一つ保存する Pmax variation の関係に重点を置いた。それらの拡大モデルの中で、対応する強制法が  $\omega_1$  上の nonstationary ideal の saturation を保存するかどうかを調べ、そのうちの結果の一つを講演し、他の結果を数理解析研究所の講究録に掲載予定 (Paul B. Larson (Miami University) との共著)。

## 3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由)

(2) は当初の予定通り研究を進めることができた。(3) は、申請時より減額幅が大きく、Paul B. Larson 氏の元に長期間滞在し、研究打ち合わせをすることができなかったため、研究予定を大幅に縮小していた。しかし、その割には結果を出すことができたと考えている。(1) が、今回の研究で大きな割合を占めている。当初は、rectangle refining property に関連する強制法の性質のみを調べる予定であったが、nonspecial な Aronszajn tree の存在を保証する Saharon Shelah の手法に着目し、当初は全く予想していなかった結果を導くことができた。さらに、Jörg Brendle 氏の助

言で、ここで調べた性質を持つ強制法がランダム実数を付け加えないことを示すことができ、ランダム実数を付け加えないccc強制法の全く新しい例を提示することができた。当初の予定より大幅に結果を出すことができたため、当初の計画以上の進展があったと言える。

#### 4. 今後の研究の推進方策

(1)は、申請時の計画は終了したので、今後は同じトピックではあるが、違う研究を進めて行く。

(2)は、サイズ  $\aleph_1$  の Dowker space にこだわらず、Dowker space に関する未解決問題を、Balogh の構成したサイズが連続体の Dowker space の構成法を応用してアプローチしたい。この研究は、大田春人氏（静岡大学）と研究打ち合わせを頻繁に行い、進めて行く。

(3)は、Paul B. Larson 氏と研究打ち合わせを継続していく。

#### 5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計4件）

① Teruyuki Yorioka, Uniformizing Ladder system colorings and the rectangle refining property, Proc. Amer. Math. Soc., 掲載決定.

② Teruyuki Yorioka, A non-implication between fragments of Martin's Axiom related to some property which comes from Aronszajn trees, Ann. Pure Appl. Logic, 168 (2010), 469--487.

<http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/4783>

③ Teruyuki Yorioka, Rudin's Dowker space in the extension with a Suslin tree, Fund. Math. 201 (2008), 53--89.

④ Teruyuki Yorioka, Some Weak fragments of Martin's Axiom related to the rectangle refining property, Arch. Math. Logic 47 (2008), 79--90.

<http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/2406>

〔学会発表〕（計4件）

① Teruyuki Yorioka, CCC without random reals, ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory, Erwin Schrödinger Institute, 2009年6月18日, Vienna, Austria.

② Teruyuki Yorioka, Two properties which come from Aronszajn trees, The 10th Asian Logic Conference, 2008年9月6日, 神戸大学.

③ Teruyuki Yorioka, A generalization of Rudin's Dowker space with a Suslin tree,

Advances in Set-Theoretic Topology (in Honour of Tsugunori Nogura on his 60th Birthday), 2008年6月12日, Centre for Scientific Culture 'Ettore Majorana', Erice, Sicily, Italy.

④ 依岡輝幸, Pmax variations for ccc structures, 公理的集合論と集合論的位相空間論, 2007年11月30日, 京都大学数理解析研究所.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~styorio/>