様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　30 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：　2007～2009
課題番号：19740048
研究課題名（和文）　アレフ１上の組合せ的命題の独立性と強制法理論

研究課題名（英文）　Combinatorics on aleph 1 and forcing theory

研究代表者
依岡　輝幸（YORIOKA TERUYUKI）
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：60432192

研究成果の概要（和文）：
本研究では、アレフ１上の組合せ的構造について研究を行った。特に、Aronszajn tree の組合せ的構造を精査し、Aronszajn tree の持つ特徴とそれに関する強制公理についての研究が中心であった。それにより、1980 年代に Stevo Todorcevic により深く研究された Martin's Axiom の部分公理の未解決問題に、新しい進展を与えた。

研究成果の概要（英文）：
In this research, I studied about combinatorics on aleph 1. In particular, I investigated combinatorics about Aronszajn trees and introduced forcing axioms related to its combinatorics. In this research, I gave a new development about famous open problems on fragments of Martin's Axiom which has been introduced and deeply studied by Stevo Todorcevic.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	390,000	2,690,000

研究代表者の専門分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)
キーワード：公理的集合論

１．研究開始当初の背景

(1) $\aleph_1$（アレフ１）とは、最小の不可算基数のことである。$\aleph_1$ 上の組合せ論は、公理的集合論の発展に重要な役割を果たす Suslin problem をはじめ、様々な場面に現れる。特に注目すべき研究は、主に 1980 年代に行われた Stevo Todorčević による一連の研究である。Todorčević は、Martin's Axiom のラムゼー理論とその応用に着目した研究で、Martin's Axiom の部分公理群を定義し、それらの応用をいくつも挙げ、さらにそれらの公理群の関係を研究した。それらの関係にはいくつもの未解決問題が残されているが、21 世紀に入って以降、全く進展が無かった。
(2) Dowker は、二つの normal な位相空間の積

が normal になるか、という一般位相幾何学における基本的な問題についての研究で、「Hausdorff かつ normal な位相空間 X が countably paracompact であることと、$X \times [0,1]$（$[0,1]$ は closed unit interval）が normal であることが同値である」ことを証明し、「Hausdorff かつ normal な位相空間は、countably paracompact か？」という問題を提唱した。この問題に最初に答えたのは Rudin である。Rudin は、Suslin's Hypothesis が成り立たない、つまり Suslin line が存在すれば、Dowker の問題の反例、つまり Hausdorff かつ normal かつ countably paracompact でない位相空間が存在することを証明した。Hausdorff かつ normal かつ countably paracompact でない位相空間のことを、Dowker space という。Rudin の最初の結果は Suslin's Hypothesis を用いており、「Dowker space が存在しない」ことが ZFC から証明できないことが示されたのだが、その後、Rudin は、ZFC から「Dowker space が存在する」ことが証明されることを示した。この証明で構成された Dowker space は、サイズ（濃度）が非常に大きい空間であったのに対して、Suslin line を用いて Rudin が最初に構成した Dowker space のサイズは $\aleph_1$ であった。そこで Rudin は、「サイズ $\aleph_1$ の Dowker space が存在する」ことが ZFC から証明できるか、という問題を提唱した。これが small Dowker Space Problem である。この問題は、30 年以上未解決の問題である。

２．研究の目的

(1) 研究代表者は、そもそも Aronszajn tree と (ω_1, ω_1)-gap の類似性について研究をしていた。この類似性は Todorčević により古くから指摘され、先行研究があるのだが、研究代表者はそれを発展させた結果をいくつか導いている。この類似性に現れる組合せ的構造に着目し、新しい半順序構造のクラスをいくつか定義して、それらの強制公理の関係について調べることが主要な目的である。

ここでは、$\aleph_1$ 上の組合せ論として Martin's Axiom を研究するので、ここで言う Martin's Axiom とは、$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ のことである。

定義 (Todorčević)**.** 各自然数 n に対して、「全ての *ccc* 強制概念は *property* K_n を持つ」という主張を $\mathcal{K}_n$ とし、「全ての $[\omega_1]^n$ の *ccc* な分割に対して、*uncountable homogeneous set* を持つ」という主張を、ここでは $\mathcal{K}_n$ と区別するために、$\mathcal{K}'_n$ とする。「全ての $[\omega_1]^{<\aleph_0}$ の *ccc* な分割に対して、*uncountable homogeneous set* を持つ」という主張を $\mathcal{H}$ と書く。

このとき、次のダイアグラムが成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{MA}_{\aleph_1} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{K}_3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_2 \arrow[d] \\
\mathcal{H} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{K}'_3 \arrow[r] & \mathcal{K}'_2
\end{tikzcd}$$

このダイアグラムで、他の implication が成り立つかどうかは全て未解決問題である。例えば、$\mathcal{K}'_2 \to \mathcal{K}_2$ が成り立つかどうかはまだ分かっていない。

これらの公理の 'ccc' を、ccc より強い別の性質で置き換えた時、上記のダイアグラムに新たな結果を導くことができるか、というのが具体的な問題である。

(2) small Dowker space problem を、位相空間の問題としてではなく、$\aleph_1$ 上の組合せ的構造としての問題と捉え（この二つは、本来は別の観点ではないのであるが、あえてこう書いている)、この問題にアプローチしたい。そのために、ここでは Rudin が導入した Suslin line から構成した Dowker space の組合せ的構造を精査し、ω_1-tree の可算列から構成する位相空間を新たに定義した。この空間が、様々な強制公理、例えば Martin's Axiom や Proper Forcing Axiom など、のもとでどういう性質を持つのかを研究するのが目的である。

small Dowker space は、ある強制公理のもとでは否定的に解決される（つまりサイズ $\aleph_1$ の Dowker space が存在しない）ことを予想する文献がいくつか見受けられる。それについて、例えば、長さ ω_1 の予測列から構成される位相空間が強制公理のもとで Dowker space になり得るか、という研究が Paul Szeptycki により行われている（この論文の中で、ここで述べている [3] の研究方針が引用されている)。よってこの研究は、Rudin の方法で small Dowker space が解決できるのかを調べることに当たる。

３．研究の方法

積極的に、様々な研究者と研究打ち合わせを行い、成果発表を行った。その実行ために、研究費のほとんどは旅費に費やされた。

４．研究成果

(1) 以下、文献 [1,2,4,5] に掲載されている結果について解説する。

定義. 強制概念 $\mathbb{P}$ が「任意の $I, J \in [\mathbb{P}]^{\aleph_1}$ に対して、$I' \in [I]^{\aleph_1}$ と $J' \in [J]^{\aleph_1}$ が存在して、任意の $p \in I'$ と $q \in J'$ に対して、$p \perp_{\mathbb{P}} q$ となる」を満たす時、*anti-rectangle refining property* (*arec*)

を持つと定義する。

この定義の最も根本的な例は、Aronszajn tree である。Suslin Hypothesis は、「全ての Aronszajn tree が uncountable antichain を持つ」という主張と同値であるから、「全ての anti-rectangle refining property を持つ強制概念は uncountable antichain を持つ」という主張は、Suslin Hypothesis の一般化だと見ることができる。この観点は、Abraham–Todorčević が指摘している Aronszajn tree と (ω_1, ω_1)-gap の類似性をより明示的にする。しかも、同じ類似な主張として「$\mathfrak{b} > \aleph_1$ である」という主張も挙げられる（[4] の結果）ことが分かる。

強制概念 $\mathbb{P}$ に対して、$a(\mathbb{P})$ を有限な antichain 全体に reverse inclusion で順序を入れた強制概念とする。$\mathbb{P}$ が anti-rectangle refining property を持つとき、「任意の $I, J \in [a(\mathbb{P})]^{\aleph_1}$ に対して、もし $I \cup J$ が Δ-system ならば、$I' \in [I]^{\aleph_1}$ と $J' \in [J]^{\aleph_1}$ が存在して、任意の $\sigma \in I'$ と $\tau \in J'$ に対して、$\sigma \cup \tau \in a(\mathbb{P})$ となる（つまり、$\sigma \not\perp_{a(\mathbb{P})} \tau$ である）」を満たす。これより、もし $\mathbb{P}$ が anti-rectangle refining property を持つならば、$a(\mathbb{P})$ が ccc であることが分かる。

これを元に、次のような強制概念のクラスを導入した。

定義. *1.* FSCO を、次を満たす強制概念 $\mathbb{Q}$ のクラスだとする。
- $\mathbb{Q}$ は不可算で、その元は可算順序数の有限集合である。
- $\leq_{\mathbb{Q}}$ は $\supseteq$ と一致する。
- $\mathbb{Q}$ は部分集合を取る操作で閉じている。

2. FSCO に属する強制概念 $\mathbb{Q}$ が *rectangle refining property* (*rec*) を持つとは、「任意の $I, J \in [\mathbb{Q}]^{\aleph_1}$ に対して、もし $I \cup J$ が Δ-*system* ならば、$I' \in [I]^{\aleph_1}$ と $J' \in [J]^{\aleph_1}$ が存在して、任意の $\sigma \in I'$ と $\tau \in J'$ に対して、$\sigma \not\perp_{\mathbb{Q}} \tau$ となる」を満たすときを言う。

この強制概念のクラスに制限した Todorčević の $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の部分公理について、次が証明される。

定理 ([5]). *1. Larson–Todorčević* の公理 $\mathcal{K}_2(\mathrm{rec})$「全ての *rectangle refining property* を持つ $[\omega_1]^2$ の分割は *uncountable homogeneous set* を持つ」ことと、「全ての *rectangle refinig property* を持つ強制概念は *property* K_2 を持つ」ことは同値である。

2.「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}(\mathrm{rec})$ が成立し、$\mathcal{K}_2$ が不成立である」ことは無矛盾である。

1 は、「$\mathcal{K}_2' \to \mathcal{K}_2$ か？」という問題のある種の部分問題を肯定的に解決したことになる。2 は、$\mathsf{MA}_{\aleph_1}(\mathrm{rec})$ が真に弱い $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ の部分公理であることを導く。

さらに、次の定理が成り立つ。

定理 ([2]). *rectangle refining property* を持つ強制概念は、*random real* を付加しない。

random real を付加しない non-ccc な強制概念はいくつも知られているが、random real を付加しない ccc な強制概念は、σ-centered な強制概念（もしくは、加茂による強い σ-linked な性質を持つ強制概念）しか知られていない。よって、この強制概念は、random real を付加しない ccc な強制概念の全く新しいクラスになっている。見込みは非常に小さいが、将来、このアイデアが ccc な強制概念 に関する Shelah の basis conjecture の解決に繋がればとてもうれしい。

rectangle refinig property を持つ強制概念に関する「$\mathcal{K}_2' \to \mathcal{K}_2$ か？」という問題（上記の図の縦の関係に関する問題）は肯定的に解決したが、「$\mathcal{K}_2 \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}$ か？」という問題 (上記の図の横の関係に関する問題）についてはどう解決されるか？これを解決するために、Shelah の定理『「Suslin Hypothesis は成立するが、non-special な Aronszajn tree が存在する」ことが無矛盾である』に着目し、$R_{1,\aleph_1}$ という強制概念のクラスを定義した（定義は省略。[2] 参照）。そして、次を証明した。

定理 ([2]). 「全ての $R_{1,\aleph_1}$ な強制概念は *precaliber* $\aleph_1$ を持つが、$\mathsf{MA}_{\aleph_1}(R_{1,\aleph_1})$ は成立しない」ことが無矛盾である。

つまり、「$\mathcal{K}_2 \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}$ か？」の部分問題「$\mathcal{K}_2(R_{1,\aleph_1}) \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}(R_{1,\aleph_1})$ か？」という問題は、否定的に解決された。さらに、この定理が Todorčevi'c–Veličikovi'c の定理『「全ての ccc な強制概念は precaliber $\aleph_1$ を持つ」ことと $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が同値である』と全く異なっていることは特筆に値する。

ちなみに、$R_{1,\aleph_1}$ な強制概念も、random real を付加しない ccc な強制概念である。$R_{1,\aleph_1}$ と rectangle refinig property は別の定義であるし、おそらく違う強制概念のクラスであると推測されるが、違いは良く分かっていない (そして、この問題にさほど重要性を感じない)。

確かに、「$\mathcal{K}_2 \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}$ か？」のある種の部分問題を解決したが、そのために定義した強制概

念のクラスは、“人工的な” ものであって、本質的な解決ではなかったように思う。“より自然な” 強制概念のクラスで、「$\mathcal{K}_2 \to \mathsf{MA}_{\aleph_1}$ か？」を解決できないか、という問題に答えたかった。そこで、rectangle refinig property の応用例として考えた「ladder system の uniformization」に着目し、次を証明した。

定理 ([1])**.** 上記の *rectangle refinig property* の定義より、やや広い *rectangle refinig property* を持つ強制概念のクラスを、ここでは rec' と書く（詳細な定義は *[1]* 参照）。

「全ての rec' な強制概念は *precaliber* $\aleph_1$ を持つが、$\mathsf{MA}_{\aleph_1}(\mathrm{rec}')$ は成立しない」ことが無矛盾である。

この証明に用いたのが、coherent Suslin tree の強制拡大である。この定理は、Larson–Todorčević の定理の拡張になっている。rectangle refinig property は、Larson–Todorčević が、位相空間論の 20 世紀の重要問題の一つである Katětov の問題の解決のために導入された重要な概念から派生して発見した概念であり、しかも、Aronszajn tree という基本的な構造の解析から見いだされたものであるので、 “より自然な” 強制概念のクラスとしてふさわしいと考えている。

(2) Rudin は、Suslin line から標準的に構成される partiton tree（これは Suslin tree となる）の可算積上に位相を定義し、それが Dowker space であることを証明した。これを定義するのに、もちろんわざわざ line から始める必要は無く、tree から始めれば良い。しかも、同じ tree のコピーの可算積ではなく、tree の可算減少列を用いれば良い。そういう考察から、Rudin の Suslin line から構成される Dowker space の一般化を行った。ここでは、これを “一般化された Rudin の Dowker space” と呼ぶことにする (定義は省略。詳細は [3] 参照)。これは、いわゆる Rudin space とは全く異なるものであることに注意する。一般化された Rudin の Dowker space のサイズは、常に $\aleph_1$ である。

定理 ([3])**.**
1. $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立てば、全ての *Aronszajn tree* の減少列から構成された一般化された *Rudin* の *Dowker space* は、*normal Hausdorff* かつ *countably paracompact* である、つまり、*Dowker space* ではない。
2. *Proper Forcing Axiom* が成り立てば、必ずしも *Aronszajn* でないある種の ω_1-*tree* の減少列（詳細な定義は *[3]* 参照）から構成された一般化された *Rudin* の *Dowker space* は、*normal Hausdorff* かつ *countably paracompact* である、つまり、*Dowker space* ではない。

上記の 1 の証明は、Fleissner の定理「$\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ が成り立てば、全ての Aronszajn tree は normal space である」の証明を参考にした。上記 2 の証明を行うために、Todorčević の side-condition method と呼ばれる強制概念の手法を用いた。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① Teruyuki Yorioka, Uniformizing ladder system colorings and the rectangle refining property, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 138 (2010), 2961-2971.

② Teruyuki Yorioka, A non-implication between fragments of Martin's Axiom related to a property which comes from Aronszajn trees, Annals of Pure and Applied Logic, 査読有, 161 (2010), no.4, 469–487.

③ Teruyuki Yorioka, Rudin's Dowker space in the extension with a Suslin tree, Fundamenta Mathematicae, 査読有, 201 (2008), 53–89.

④ Teruyuki Yorioka, The inequality $\mathfrak{b} > \aleph_1$ can be considered as an analogue of Suslin's Hypothesis, Axiomatic Set Theory and Set-theoretic Topology (Kyoto 2007), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 査読無, No. 1595 (2008), 84–88.

⑤ Teruyuki Yorioka, Some weak fragments of Martin's Axiom related to the rectangle refining property, Archive for Mathematical Logic, 査読有, 47 (2008), 79–90.

〔学会発表〕（計 7 件）

① 依岡　輝幸, ランダム実数を付け加えない CCC 強制法の新しい例と Prikry と Shelah の問題について, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 26 日,

大阪大学.

② Teruyuki Yorioka, CCC without random reals, ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory, Erwin Schrödinger Institite, 2009 年 6 月 18 日, Vienna, Austria.

③ 依岡 輝幸, カルキン環の射影作用素からなる極大鎖の長さについて, 2009 年度日本数学会年会, 2009 年 3 月 28 日, 東京大学.

④ Teruyuki Yorioka, Two properties which come from Aronszajn trees, The 10th Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 6 日, 神戸大学.

⑤ Teruyuki Yorioka, A generalization of Rudin's Dowker space with a Suslin tree, Advances in Set-Theoretic Topology (in Honour of Tsugunori Nogura on his 60th Birthday), Centre for Scientific Culture "Ettore Majorana", 2008 年 6 月 12 日, Erice, Sicily, Italy.

⑥ Teruyuki Yorioka, A generalization of Rudin's Dowker space with a Suslin tree, International Conference on Topology and its Applications 2007, 2007 年 12 月 5 日, 京都大学数理解析研究所.

⑦ Teruyuki Yorioka, Fragments of Martin's Axiom Related to the Rectangle Refining Property, Logic Colloquium 2007, 2007 年 7 月 15 日, Wroclaw, Poland.

〔その他〕
ホームページ
http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~styorio/

6．研究組織

(1) 研究代表者

依岡 輝幸（YORIOKA TERUYUKI）
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：60432192