

機関番号：17102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740051

研究課題名（和文） 確率的取引時刻による資産流動性の研究

研究課題名（英文） Study on illiquid assets with stochastic trade times

研究代表者

松本 浩一（MATSUMOTO KOICHI）

九州大学・大学院経済学研究院・准教授

研究者番号：30380687

研究成果の概要（和文）：

資産流動性の数理モデルによる解析は、世界的にも新しい重要な研究である。本研究では、確率的取引時刻を中心とする数理モデルを用いて、数理ファイナンスの基礎的な三種類の問題とそれに関連する数値計算手法（計算ファイナンス）の研究を行なった。具体的には、投資問題、デリバティブ価格付け問題、リスク管理問題の研究を行なった。これらの問題の研究により、資産流動性が市場参加者に与える影響が明らかとなった。

研究成果の概要（英文）：

It is new and important to study illiquid assets from a mathematical viewpoint. In this study, I have considered three basic financial problems using mathematical models such as a stochastic trade times model. I have solved an optimal portfolio problem, a hedging problem and a risk management problem. Further I have studied an associated computational problem. The results have characterized the influence of the liquidity on investors.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,100,000	660,000	3,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数理ファイナンス，金融工学

## 1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスは株式，金利，為替，企業倒産，天候，地震など様々な不確定要素に伴うリスクの適切な管理方法を市場に提供し，社会全体の安定に貢献してきた。

しかし，現在までに理論的な解析がほとんど進んでいない不確定要素も存在する。その1

つが本研究のテーマである資産の流動性である。

市場参加者は資産の流動性に伴うリスクを認識し，その巨大さに脅威を感じている。しかし，流動性の理論的な研究は未だ発展途上であり，実用的技術の開発につながるような結果は皆無に等しい。

私は 10 年間の金融機関における実務経験の中でこのことに強い危機感を感じ、資産流動性の研究は現在の数理ファイナンス及び金融工学の最も重要な課題であると考えてに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は資産の流動性を数理ファイナンスの立場から解析することである。具体的には、資産の流動性を考慮した取引時刻の不確実性で表現するモデル（確率的取引時刻）を中心とする数理モデルを用いて、以下の3種類の問題の研究を実施する。

- (1) 資産の投資問題。
- (2) デリバティブの価格付け問題。
- (3) リスク管理問題。

私はこれらの問題の解決を通じて資産市場の整備、リスク管理の高度化に寄与し、数学の立場から社会全体の発展に貢献することを目指している。

## 3. 研究の方法

### (1) 資産の投資問題

制約付き投資問題中心に、以下の課題について検討する。

- ・最適成長率。
- ・最適投資戦略。
- ・流動性の及ぼす最適成長率、最適投資戦略に対する影響。
- ・投資制約の及ぼすマイナス効果。
- ・長期投資によるリスク削減効果。

### (2) デリバティブの価格付け問題

①確率的取引時刻を用いる場合、デリバティブの完全複製を前提とした完備市場の理論を適用することはできない。本研究ではリスク最小化を基準にしてデリバティブの価格付け問題に関連する以下の課題に取り組む。

- ・デリバティブの最適ヘッジ戦略。
- ・デリバティブの理論価格。
- ・流動性の及ぼすデリバティブの最適ヘッジ戦略、理論価格に対する影響。

②確率的取引時刻は各時刻における取引執行が成功、失敗の2状態のどちらかになるモデルと考えることができる。取引の部分的な成功を考慮することは、モデルの自然な拡張である。この拡張したモデル（部分執行リスクを考慮した離散時間モデル）を用いて以下の課題に取り組む。

- ・デリバティブの最小ヘッジコスト。
- ・デリバティブの最適ヘッジ戦略。
- ・流動性の及ぼすヘッジコスト、ヘッジ戦略に対する影響。

③取引量の取引価格への影響を考慮した流

動性モデル（確率供給曲線の離散時間モデル）の下、デリバティブの価格付け問題に取り組む。部分取引執行リスクモデルではデリバティブの完全複製が困難であるが、このモデルではデリバティブの完全複製が可能と考えられるため、問題はデリバティブの複製問題となる。したがって、以下の課題に取り組む。

- ・デリバティブの複製費用。
- ・デリバティブの複製戦略の存在、一意性。
- ・流動性の及ぼすデリバティブの複製費用、複製戦略に対する影響。

### (3) リスク管理問題

資産の流動性リスクを考慮した場合、古典的モデルを前提とした場合と比較して、資産の総リスク量は増大すると考えられる。また、短期間に資産を売買することが困難になることから、長期的視点でリスク管理を行う必要がある。本研究では多期間のリスク管理に伴う以下の課題に取り組む。

- ・多期間リスク測度の時間変化と時間整合性。
- ・リスクシナリオ集合の性質。
- ・先行研究の多期間リスク測度の比較。
- ・新しい多期間リスク測度。
- ・多期間リスク測度の数値計算方法。

### (4) 計算ファイナンスの研究

デリバティブ価格、リスク管理は最適停止問題と関係する。高次元空間における最適停止問題の数値解法の研究を行ない、新しい効率的な数値計算方法の開発に取り組む。

## 4. 研究成果

投資問題、デリバティブ価格付け問題、リスク管理問題、これらの問題に関連する数値計算手法（計算ファイナンス）の研究を行なった。

### (1) 投資問題。

ポートフォリオインシュアランス問題（資産下限制約付き最適投資問題）に取り組み、最適投資戦略、資産成長率の特徴付けを行なった。

①資産下限制約は短期的には資産成長率に悪影響を及ぼすが、長期的にその影響は緩和し、極限において無視することができる。このことを資産成長率の漸近的な挙動の理論的解析と数値シミュレーションによる検証によって示した。

②無期限期間の資産成長率を基準にした場合、最適投資戦略を一意的に決定することができない。この問題を解決するため、異なる投資戦略で資産成長率が一致する条件を示し、投資戦略の効率の差を明確にする補助的指標を示した。

研究成果は論文にまとめ、国際学術誌で発表した。("Portfolio Insurance with Liquidity Risk, "Asia-Pacific Financial Markets, "Optimal Growth Rate in Random Trade Time," Advances in Mathematical Economics)

#### (2) デリバティブ価格付け問題.

デリバティブ価格付け問題を複数の流動性モデルを用いて多面的に解析した。

①離散時刻におけるデリバティブヘッジ問題に取り組み、最適ヘッジ戦略、最適初期コスト、最適初期ポートフォリオを明らかにした。

確率的取引時刻の場合、デリバティブの完全ヘッジは困難であり、ヘッジ誤差の評価が必要である。本研究ではヘッジ誤差を平均二乗の意味で評価し、適当な条件の下でヘッジ問題がヒルベルト空間上の射影問題と捉えられることを示した。このことを用いて、最適ヘッジ戦略の存在を示し、再帰的な式による表現を与えた。また、符号付測度を用いて最適初期コストと最適初期ポートフォリオの自然な表現を得ることに成功した。本研究は従来の結果の一般化であり、特別な場合として離散確定時刻ヘッジ問題や静的ヘッジ問題を含んでいる。

研究成果は国際会議において発表した。また、研究成果を論文にまとめて国際学術誌で発表した。("Mean-Variance Hedging with Uncertain Trade Execution," Applied Mathematical Finance)

②確率的取引時刻のモデルを別の視点から見ると、各時刻において取引執行が成功、失敗の2状態のどちらかになるモデルと考えることができる。取引執行の部分的な成功を考慮することはモデルの自然な拡張である。確率的取引時刻モデルを拡張したモデル(部分執行リスクを考慮した離散時間モデル)を用いて、最小分散ヘッジ問題に取り組み、最適ヘッジ戦略、最小ヘッジコストについて検討した。

従来の研究では最適解をヒルベルト空間の射影定理を使用して導出していたが、本研究では動的計画法を用いることにより、新しい最適解の表現を得た。さらに最適解の計算に必要な数式はすべて再帰式によって与えることが可能であることを示し、従来の方法より計算効率が高いことを確認した。

研究成果は国際会議において発表した。また、研究成果を論文にまとめて、国際学術誌に発表した。("Dynamic Programming and Mean-Variance Hedging with Partial Execution Risk," Review of Derivatives Research)

③取引量の取引価格への影響を考慮した流動性モデル(確率供給曲線の離散時間モデル)を用いて、デリバティブの価格付け問題に取り組んだ。

部分取引執行リスクモデルと異なり、このモデルではデリバティブの完全複製が可能だが、流動性費用が発生する。一般化した確率供給曲線の下、完全複製戦略の存在、一意性の条件を示した。また、完全複製費用を導出し、デリバティブの資産受渡条件や取引数の流動性費用に対する影響を解析した。

研究成果は国際会議において発表した。

#### (3) リスク管理問題.

資産の流動性リスクを考慮した場合、リスク管理は長期的視点で行う必要がある。長期的リスク管理に必要な多期間許容可能測度の研究を行なった。主な研究成果は以下の通りである。

①許容可能測度の時間変化を確率過程で表現し、満たすべき性質(弱時間整合性)を提示した。

②多期間許容可能測度を確率測度の集合(リスクシナリオ集合)によって表現し、弱時間整合性の観点からリスクシナリオ集合が満たすべき性質を明らかにした。

③実用的な許容可能測度であるテール・バリュー・アット・リスク測度の多期間化は、一意的でないことを証明した。

④先行研究の多期間テール・バリュー・アット・リスク測度が本研究の枠組みで説明できることを証明し、本研究が先行研究の一般化であることを明らかにした。

⑤2種類の新しい多期間テール・バリュー・アット・リスク測度を提案し、これらの測度が最適停止問題で表現できることを証明した。また、その数値計算方法を示した。

研究成果は国際会議において発表した。

#### (4) 計算ファイナンス.

デリバティブ価格、リスク管理は最適停止問題と関係する。高次元空間における最適停止問題の数値解法の研究を行ない、新しい効率的な数値計算方法を示した。

研究成果は国際会議において発表した。また、研究成果を論文にまとめて国際学術誌で発表した。("Simple Improvement Method for Upper Bound of American Option," Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計13件)

①Koichi Matsumoto, M. Fujii, K. Tsubota, Simple Improvement Method for Upper Bound of American Option, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 印刷中, 査読有

②Koichi Matsumoto, Dynamic Programming and Mean-Variance Hedging with Partial Execution Risk, Review of Derivatives Research, 12, 29-53, 2009, 査読有

③Koichi Matsumoto, Mean-Variance Hedging with Uncertain Trade Execution, Applied Mathematical Finance, 16, 3, 219-252, 2009, 査読有

④Koichi Matsumoto, Optimal Growth Rate in Random Trade Time, Advances in Mathematical Economics, 12, 129-152, 2009, 査読有

⑤Koichi Matsumoto, Portfolio Insurance with Liquidity Risk, Asia-Pacific Financial Markets, 14, 4, 363-386, 2007, 査読有

[学会発表] (計19件)

①Koichi Matsumoto, Multi-period Coherent Acceptability Measures in Discrete Time, 研究集会「数理ファイナンスとその周辺」, 東京大学大学院経済学研究科学術交流棟, Tokyo, Japan, 2011/1/28

②Koichi Matsumoto, Tail VaR Measures in a Multi-period Setting, Quantitative Methods in Finance Conference 2010, Hilton Sydney Hotel, Sydney, Australia, 2010/12/16

③Koichi Matsumoto, Weak Time Consistency Conditions for Tail VaR Measures, Workshop on Mathematical Finance and Related Issues, Kyoto Research Park, Kyoto, Japan, 2010/9/13

④Koichi Matsumoto, Simple Improvement Method for Upper Bound of American Option, 6th World Congress of the Bachelier Finance Society, Hilton Hotel, Toronto, Canada, 2010/6/23

⑤Koichi Matsumoto, Weak Time Consistency and Multi-period Tail VaR Measures, 2010 Workshop & Spring School on Stochastic Calculus and Applications, Academia Sinica in National Taiwan University,

Taipei, Taiwan, 2010/4/16

⑥Koichi Matsumoto, Option Replication in Discrete Time with Liquidity Risk, Quantitative Methods in Finance Conference 2009, Amora Hotel, Sydney, Australia, 2009/12/17

⑦Koichi Matsumoto, Improvement in Upper Bound of American Options, Mathematical Finance and Related Topics in Economics and Engineering, Kansai Seminar House, Kyoto, Japan, 2009/8/13

⑧Koichi Matsumoto, Simple Improvement Method of Upper Bound of American Options, OPTIMAL STOPPING WITH APPLICATIONS, Åbo Akademi University, Åbo/Turku, Finland, 2009/6/24

⑨Koichi Matsumoto, Optimal Hedging with Partial Execution Risk, Quantitative Methods in Finance Conference 2008, Amora Hotel, Sydney, Australia, 2008/12/19

⑩Koichi Matsumoto, Mean-Variance Hedging in Discrete Time with Execution, WORKSHOP ON "FINANCE AND RELATED MATHEMATICAL AND STATISTICAL ISSUES", Kyoto Research Park, Kyoto, Japan, 2008/9/4

⑪Koichi Matsumoto, Dynamic Programming and Mean-Variance Hedging with Partial Execution Risk, Bachelier Finance Society Fifth World Congress, Imperial College, London, the United Kingdom, 2008/7/18

⑫Koichi Matsumoto, Mean-Variance Hedging with Partial Execution Risk, 科研費研究集会「数理ファイナンスとその周辺」, 東京大学大学院数理科学研究科, Tokyo, Japan, 2008/1/24

⑬Koichi Matsumoto, Mean-Variance Hedging in Random Discrete Trade Time, Quantitative Methods in Finance Conference 2007, Amora Hotel, Sydney, Australia, 2007/12/13

⑭Koichi Matsumoto, Optimal Strategy with Uncertain Trade Execution, 「ファイナンスの数理解析とその応用」研究集会, 京都大学数理解析研究所, Kyoto, Japan, 2007/11/20

⑮Koichi Matsumoto, Mean-Variance Hedging in an Illiquid Market, Workshop and

Mid-Term Conference on Advanced  
Mathematical Methods for Finance, Vienna  
University of Technology, Vienna, Austria,  
2007/9/19

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 浩一 (MATSUMOTO KOICHI)  
九州大学・大学院経済学研究院・准教授  
研究者番号：30380687

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし