様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年３月３１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2008
課題番号：19740056
研究課題名（和文）　ロジーフラクタルに関するサブスティテューションの特徴づけの研究

研究課題名（英文）　Characterization related to Rauzy fractals of substitutions

研究代表者
江居　宏美（EI HIROMI）
中央大学・理工学部・助教
研究者番号：60333051

研究成果の概要：ランク 3 以上のサブスティテューションに対し，その可逆性とサブスティテューションに対して決まる指標との関係を与えた．また，可逆性と連結性について，ランク 2 の結果の反例となる，非可逆（可逆）であるが R-フラクタルが連結（非連結）となる例を発見した．自由群上の同型写像については，サブスティテューションの場合と同様に扱うことのできるクラスを設定し，R-フラクタル，タイリングの生成方法を与えた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
年度			
総　計	900,000	120,000	1,020,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：
サブスティテューション，記号力学系，フラクタル，タイリング，自由群，エルゴード理論

１．研究開始当初の背景

ランク N の サブスティテューションと呼ばれる，アルファベット $A=\{1,\cdots,N\}$ に関する自由モノイド上の自己準同型写像について，次のことが知られている．（サブスティテューションを σ と書くことにする．）

サブスティテューション σ に対して σ(*j*)に現れる文字 *i* の発生数により N×N 行列 M_σ を定義したとき，その固有多項式が既約，定数項が±1，最大固有値が Pisot 数という，**既約**，**ユニモジュラ**，**Pisot** 条件を仮定しておく．σ の不動点(周期点)となる片側無限列 ω から Full shift 上の距離を用いて Ω_σ := Closure of {S(ω)｜ n≧0 } と定義したとき，シフト変換 S（但し，S(a1 a2 a3 …) := a2 a3…となる Full shift 上の変換)を用いて，Substitutive Dynamical System とよばれる記号力学系（Ω_σ,S)を構成することができる．

この力学系（Ω_σ,S）の幾何学的な表現として（正確には空間的同型となる力学系），境界がフラクタルとなる集合 X_σ と，その集合上の領域変換 E からなる力学系（X_σ,E）の存在が知られている．（フラクタル図形 X_σ を R-フラクタルと呼ぶことにする．）

本研究分野において，主に次の３つの視点より研究が行われている.
「タイリング」:R-フラクタルを用いた周期的タイリング，N 個の分割タイルを用いた準周期タイリング.
「力学系」:N 次元トーラス上の回転と同型になる R-フラクタル X 上の領域変換 E,
行列 Mσに関するマルコフ分割の構成.
「数論」: ベータ展開とその周期性.

そういった中，研究開始当初ごろから，先にあげた 3 条件（既約，ユニモジュラ，Pisot）を満たさない場合について研究が行われ始めた．また，数論的手法により研究を行っているグループによって，R-フラクタルの幾何学的な特徴に関する研究も行われていた.

２．研究の目的

R-フラクタルの生成方法として，射影法を用いる方法とタイル変換（1 次元双対拡張 $E_1^*(\sigma)$）を用いる方法（以後，タイル変換法と呼ぶ．）があるが，本研究ではタイル変換法を用いて R-フラクタル，さらにタイリングを生成する手法をとっている．また，サブスティテューションσに対する k 次元拡張 $E_k(\sigma)$ や k 次元双対拡張 $E_k^*(\sigma)$ を用いて研究を行う．タイル変換を用いる大きな利点は，R-フラクタルの幾何学的な特徴を捉えやすい，具体的には，その境界を直接的に計算して生成できるという点である．タイル変換法は，先の 3 条件を満たす場合にはすでに確立されている.
そこで，本研究の主目的は，次の３つである：

（１）サブスティテューションの可逆性の判定

ここでは詳しくは述べないが，与えられたサブスティテューションσに対し，σの N 次元拡張 $E_N(\sigma)$ を定義できる．（N=2 の場合は，$E_N(\sigma)$ はσ($121^{-1}2^{-1}$) を計算するのと同等である．）また $E_N(\sigma)$ により，σに対し，ある指標 d（１以上の整数）が決まる．ランク 2（N=2）の場合はσが可逆であることの必要十分条件として，d=1 という結果があり，さらに，任意のランクに対しては，必要条件であることが知られている.（但し，サブスティテューションσが可逆であるとは，σを自由群上の自己準同型写像としたとき，σが逆写像をもつことである.） そこで，本研究の目的は，その十分性を議論することである.

（２）R-フラクタルの幾何学的特徴

ランク 2 のサブスティテューションの R-フラクタルは連結（線分，区間），あるいは非連結になるが，R-フラクタルが連結であるための必要十分条件はサブスティテューションが可逆であるとう結果がある．そこで，本研究では，ランク 2 における結果が任意ランクにおいても成り立つかどうかを調べ，サブスティテューションの可逆性と R-フラクタルの幾何学的特徴の関係について研究を行う.

（３）自由群上の準同型写像を用いた R-フラクタルの生成方法

サブスティテューションとは，アルファベットに関する自由群上の準同型写像を自由モノイド上に制限したものである．そこで，本研究の目的は，サブスティテューションに対して確立されていたタイル変換法を自由群上の同型写像まで拡張し，R-フラクタルとタイリングを生成するための手法を確立することである.

３．研究の方法

研究目的（１）について：サブスティテューションが可逆ならば，行列 Mσの行列式は±1 となるので，行列式が ±1 となるような行列を与え，それに対するサブスティテューションを計算機によりすべて発生させ，サブスティテューションσの N 次元拡張 $E_N(\sigma)$ から決まる指標 d と可逆性との関連性を調べた．ランク 2 の結果から，d=1 ならば可逆であることが予想できるが，σを自由群上の準同型写像まで拡張すると，この結果が成り立たない例が知られている．そこで，反例が上る可能性があることを前提に解析を行った.

研究目的（２）について：（１）で発生させたランク 3 のサブスティテューションたちに対して，R-フラクタルを生成し，その幾何学的特徴，特に連結性について解析を行った．Dekking による，自由群上の準同型写像に対してフラクタル曲線を生成する方法があるが，サブスティテューションσが可逆な場合，R-フラクタルの境界は，その逆写像 σ^{-1} から生成できる．しかし，非可逆な場合については，そのような境界を生成する準同型写像の存在は知られていない．非可逆な場合に対し，境界を生成する準同型写像をみつけ，その上で R－フラクタルの連結性などを解析した.

（３）自由群上の同型写像について，サブスティテューションの場合と同様にタイル変換法を用いてR-フラクタル，タイリングが生成できるための条件を与え，その条件を満たす同型写像に対して，タイル変換法の拡張を行った.

４．研究成果

研究目的（１）について：ランク 3, 4, 5 のサブスティテューションを大量に発生させ，それぞれのサブスティテューションのＮ次元拡張E_N（σ）から決まる値 d をコンピュータで計算し，可逆性との関係を調べた結果，ランク２の結果の反例に当たるものは見つからなかった．また，d=1 であることの必要十分条件として，R-フラクタルの境界生成に用いられる N-1 次元双対拡張 E_{N-1}^*(σ）が可逆であるという，弱い意味での必要十分条件を示した．サブスティテューションに関するさまざまな結果において，ランク２とランク３以上では，多々，ギャップが生じることを踏まえると，任意ランクに対しても d=1 であることとσが可逆であることが同値となるであろうことを予想できたことは，この先の研究において重要であり，今後の展望として，任意ランクでの必要十分性を示すことを挙げる.

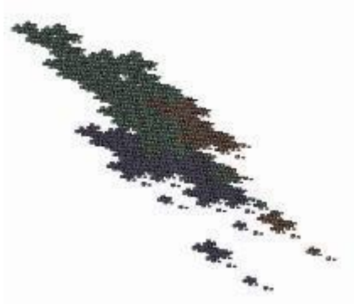
研究目的（２）について：ランク２の場合，可逆ならばR-フラクタルの幾何学的特徴として，連結であるが，ランク３の場合，可逆だが非連結，非可逆だが連結となる例([例 1], [例 2] 参照)を発見した．これは，ランク 2 の場合の，サブスティテューションの可逆性と R-フラクタルの連結性に関する結果の反例を与えたという意味で重要である.

サブスティテューションが可逆な場合は R-フラクタルの境界は逆写像を用いて，Dekking の方法により生成できることが知られているが，非可逆な場合は，一般的に境界を決める自由群上の準同型写像は分かっていない．そこで，いくつかの例に対し，サブスティテューションの N-1 次元双対拡張 E_{N-1}^*(σ）から，境界に関する準同型写像を求める手法を提案した．これにより，非可逆な場合でも準同型写像を用いて，R-フラクタルの境界の解析が可能となった．非可逆な例２ に対しては，境界を生成する準同型写像として次のような非可逆な準同型写像 θ を発見した.

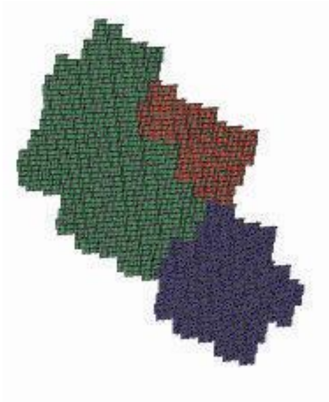
$\theta(1)= 12^{-1}$, $\theta(2)=213^{-1}1^{-1}21^{-1}$,
$\theta(3)= 331^{-1}$

今後の展望として，すべての非可逆なサブスティテューションに対して境界を生成するための準同型写像を決める手法を確立することを挙げる.

[例 1]　可逆：$\sigma(1)= 1213211$,
$\sigma(2)=121321$, $\sigma(3)= 1132$



[例 2]　非可逆：$\sigma(1)= 1213121$,
$\sigma(2)= 123112$, $\sigma(3)= 1213$



研究目的（３）について：自由群上の同型写像を σ としたとき，$\sigma = \delta^{-1}\circ\phi\circ\delta$ を満たすようなサブスティテューション φ と同型写像 δ が存在するような同型写像 σ のクラスを設定した．その中で，サブスティテューション φ（$\phi(1)= 1^a2$, $\phi(2)=1$）と同型な

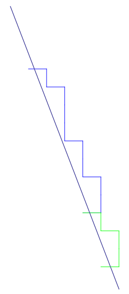
$\sigma(1)= 1^b2$, $\sigma(2)=(1^b2)^{-(b-a)}1$,　a<b,

で与えられたランク 2 の同型写像について，タイル変換と適切なパッチ（シード）を用いて，タイリングを生成することができた.
また，

$\sigma(1)= 12^{-1}1$,　$\sigma(2)= 12^{-1}$

で与えられた同型写像についても，タイリングと，ある直線に近い格子点を通る折れ線 Stepped Surface（図１参照)の生成方法を決めた．既存の研究では扱われていない同型写像のクラスを設定し，さらにタイリング生成方法を与えたという意味で重要な結果である.

[図 1]タイリングと関係した，Stepped Surface



今後の展望として，今回の手法が応用できるようなδの条件を見つけること，また，ランク 3 以上の同型写像についてその手法を確立することを挙げる．さらに，近年において活発に議論され始めている，サブスティテューションの 3 条件を満たさない場合に対しても，この手法の応用方法を探っていくことを，展望として挙げる．

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① 榎本文彦，江居宏美，古門麻貴，伊藤俊次，“Tilings of a Riemann surface and cubic Pisot numbers，” *Hiroshima Math. J.*，vol. 37, no. 2 pp. 181-210,2007，査読有.

② Valérie BERTHÉ，江居宏美，伊藤俊次，Hui RAO，“On サブスティテューション invariant sturmian words : an application of Rauzy fractals，” *Theoret. Informatics Appl.*，vol. 41, no. 3 pp. 329-349，2007，査読有.

〔学会発表〕（計 3 件）

①江居宏美，“Atomic surfaces generated by automorphisms of rank 2 in some class，” International Workshop on Fractal Geometry and Ergodic Theory, Beijing Technology University and Tsinghua Uiversity (China)，2008 年 11 月 2 日.

② 江居宏美，“Connectedness of atomic surfaces generated by invertible substitutions，” Combinatorial and Computational aspects of Tilings, Imperial College London (England)，2008 年 7 月 30 日.

③江居宏美，“Stepped surfaces generated by automorphisms of the free group，” Journées de Numération, Graz University of Technology (Austria)，2007 年 4 月 16 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

江居　宏美（EI HIROMI）
中央大学・理工学部・助教
研究者番号：60333051

(2)研究分担者

(3)連携研究者