

平成22年5月20日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740058

研究課題名(和文) 実効的界面モデルの確率論的解析

研究課題名(英文) Stochastic analysis for the effective interface model

研究代表者

西川 貴雄 (NISHIKAWA TAKAO)

日本大学・理工学部・講師

研究者番号：10386005

研究成果の概要(和文)：本研究では、界面の確率論的モデルである「実効的界面モデル」と呼ばれる系について、大規模・長時間漸近挙動について解析を行った。その結果、保存則を持つ系に対する大偏差原理、凸でないポテンシャルを持つ場合の定常測度の特徴付け及びスケール変換の極限として非線形偏微分方程式の導出を行った。

研究成果の概要(英文)：The main topic of this research is the analysis for the large scale and long time asymptotic behavior of the effective interface model. First results of this research is the large deviation for the interface model with a conservation law. The next is the characterization for the family of stationary measures for the stochastic dynamics with non-convex potential, and the description of the partial differential equation from scaling limit of the stochastic dynamics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,500,000	0	1,500,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	480,000	3,580,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論・数理物理・大規模相互作用系

1. 研究開始当初の背景

2つの相反する相が混在して存在する時、これらの相を分離する界面が現れる。Isingモデルに代表されるスピン系が相分離の自然な数学的モデルであるが、界面についての考察をするためには、二つの相が共存する状況下、つまり相転移が起きている状況下において考察することになる。この場合、自然に

導入される時間発展の解析には非常に困難を伴う。そこで、相転移を内在的に扱うのではなく、相転移が起きていることを最初から認めたモデルが導入された。つまり、二相を分離する界面そのものを微視的対象物、つまり秩序変数としたモデルを考察の対象とするのである。こうして導入されたモデルは実効的界面モデルと呼ばれる。

実効的界面モデルの一つが「 $\nabla\phi$ 界面モデル」であり、このモデルに対して、ミクロからマクロへと結ぶスケール変換を施し極限操作を行うことによる異方的平均曲率運動の導出（大数の法則）、メゾスケールの系の解析を行う平衡揺動（中心極限定理）、確率の詳細な漸近挙動を記述する偏差原理と、種々の結果が得られていた。ただし、技術的困難から、いくつかの結果を除き、系の境界条件として、周期境界条件が課されていた。自然現象としてみたとき、境界条件についての不自由さは、いささかの不自然さがあつたことは否めない状況であつた。

2. 研究の目的

本研究においては、「 $\nabla\phi$ 界面モデル」や関連する系について、その長時間・大規模漸近挙動について考察を行うことが本研究の主たる目的である。特に、系に境界条件や反射壁・ピンニング等の要件を付加した系の振る舞いについて、特に巨視的方程式の導出や中心極限定理・大偏差原理型定理の証明を目指し解析を進めることを目的とする。

3. 研究の方法

研究の背景において系の境界条件について述べたが、周期境界条件以外の境界条件下での考察の一つが研究代表者の行った研究であつた。「 $\nabla\phi$ 界面モデル」に対し、Dirichlet型境界条件を課した場合に、巨視的方程式の導出に成功している。ここでは、非線形放物型偏微分方程式で用いられる手法を援用し、必要な評価を得ることができている。ここでの方法を他の系に対しても適用することができないか考えることとした。

ここでの考察において、境界条件を変えた場合、平衡状態についてのより詳細な情報が鍵となることがわかっている。巨視的運動の方程式を導出する際、巨視的にみたときに小さな領域において、それぞれ巨視的パラメータにより決定された平衡状態にあること、つまり局所平衡状態が成立することを經由して行う。この証明をするに当たっては、対応する平衡状態が特徴付けられていることが重要となる。周期境界条件を課した場合には、局所平衡の成立は相対エントロピーを介した証明が一般的であり、この場合に現れる平衡状態はギブス測度と呼ばれるものである。従つて、このアプローチをとることができる限り、ギブス測度に対する特徴付けがなされていれば十分である。しかしながら、Dirichlet型境界条件を課した場合、境界からの寄与によって相対エントロピーが常に無限大になってしまい、定義することそのものに困難を伴う。研究代表者による以前の結果においても同様の困難にあつたのだが、相対エントロピーについての議論を回避し

た証明を用意することができた。ただし、全く代償がないわけではなく、平衡状態についてより広いクラスである定常測度についての特徴付けが必要となつている。この観点から、確率過程である時間発展について、対応するギブス分布だけではなく、定常測度についての特徴付けができるかどうか、またギブス測度と定常測度との関係について考察を行うこととした。

また、研究代表者による以前の研究において、「 $\nabla\phi$ 界面モデル」に対応した体積保存系について考察を加え、平衡状態の特徴付け、巨視的方程式として4階の非線形偏微分方程式を導出できている。この結果の手法を生かしながら、境界条件等の条件を変えた場合について、Wulff形状との関係から教務部会対象と考えている。ここで考察したのは周期境界条件下の系であり、「ギブス測度」について特徴付けをすでに与えた。ここでも、「定常測度」がどのようなクラスであるかに注力する。

4. 研究成果

本研究課題において、得られた結果は主に以下の二件である。

(1) 保存系に対する大偏差原理型の定理

界面の時間発展として Funaki-Spohn で採用しているのは Langevin 方程式、つまりハミルトニアン $H(\phi)$ の勾配流に対して、ブラウン運動による揺動を加えた方程式、つまり確率微分方程式系

$$d\phi_t(x) = -\frac{\partial H}{\partial \phi_t(x)}(\phi_t) + \sqrt{2}dw_t(x)$$

である。ただし、 H は界面のエネルギーを与える関数であり、

$$H(\phi) = \sum_{|x-y|=1} V(\phi(x) - \phi(y))$$

により導入する。この関数が界面のエネルギーを与えるものである。ただし、他にも、非負定値行列 A に対し

$$d\phi_t(x) = -A \frac{\partial H}{\partial \phi(\cdot)}(\phi_t)(x) dt + \sqrt{2A}dw_t(x)$$

を考察することができる。退化している場合であれば、部分空間内を動く時間発展に対応し、行列はそのメトリックを定めていると解釈できる。特に、離散ラプラシアンで定めたものは、界面の高さの総和

$$\sum_x \phi_t(x)$$

を保存則とするような界面運動として自然に現れる。また、このモデルは界面を構成する粒子が界面の表面を流れる「表面拡散」のモデルとも考えることができる。

この で与えた時間発展に対し、空間方向については 倍して圧縮し (サイズを正規化)、また時間方向については 倍して加速する、拡散型とは異なるスケーリングの下、四階の非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta \operatorname{div}((\nabla \sigma)(\nabla h))$$

が巨視的方程式として現れることがすでに研究代表者により証明されている。この方程式の解に収束することから、それ以外にとどまる確率は 0 に収束するはずである。今回、空間の次元 について という部分的な結果ではあるが、方程式の解以外の近傍にとどまる確率は

$$P(h \approx h') = \exp(N^d I(h'))$$

と指数型減衰を示すこと、さらに減衰の係数が具体的に

$$I(h) = \int_0^T \left\| \frac{\partial h}{\partial t} + \Delta \operatorname{div}((\nabla \sigma)(\nabla h(t))) \right\|_{H^{-1}}^2 dt$$

の形で表すことができる、つまり大偏差原理型の定理を証明することができた。

なお、注記しておく、次元に対する仮定を課しているが、これは平衡状態としてギブス測度についてのみ特徴付けがなされており、定常測度についての情報が得られていないことに由来する。本研究においてその解決を見ることはできなかったが、今後の研究において解決を目指すこととしたい。

(2) 非凸ポテンシャルを持つときの巨視的方程式の導出

先に述べたように、定常測度のクラスについての考察の必要性を感じていたが、同様の問題が起きる系において考察を加えてみることにした。通常の「 $\nabla \phi$ 界面モデル」に対しては、Funaki-Spohn(1997) において、定常測度のクラスが完全に特徴付けられている。ただし、放物型偏微分方程式のアプリオリ評価に類似の手法をとっており、その非退化性に相当する、(1)で紹介したハミルトニアン H を定める関数 V についての狭義凸性が本質的となっている。ここでの手法は狭義凸性が無ければ適用は望むことができないことは注意しておく。

昨今、関数 V が凸でない場合について、系の解析が他研究者により進められ、徐々に性質が明らかになってきている。それらの結果を踏まえ、相互作用の凸性を仮定しない場合について時間発展の解析、特に定常測度の特徴付けを試みた。この結果、相互作用の主要部が狭義凸であり、コンパクトな台をもつ関数による摂動であれば、系に対応する平行移動不変かつ 2 次モーメントを持つギブス

分布のクラスと、平行移動不変かつ 2 次モーメントを持つギブス分布のクラスとが一致することが証明できた。特に、摂動部が小さければ、ギブス分布についての特徴付けが Cotar-Deuschel (2008) により行われており、なおかつ、巨視的な時間発展を定める「表面張力」についての性質も上の論文および Cotar-Deuschel-Mueller において調べられており、これを先般の研究代表者による手法を組み合わせた結果、Funaki-Spohn で導出された 2 階非線形偏微分方程式と同等の方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}((\nabla \sigma)(\nabla h(t)))$$

が巨視的時間発展として導かれることが証明できた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- 1 T. Nishikawa, Hydrodynamic limit for the interface model with general potentials, Oberwolfach Report Volume 5, Issue 4, 2008, pp. 3127-3130.

[学会発表] (計 7 件)

- 1 西川 貴雄, Hydrodynamic limit for the interface model with general potentials, 研究集会「Topics on Random Media」, 2009年9月15日, 京都大学
- 2 西川 貴雄, Hydrodynamic limit for the interface model with general potentials, 研究集会「Interplay of Analysis and Probability in Physics」, 2008年12月6日, Oberwolfach(ドイツ)
- 3 西川 貴雄, 一般化されたポテンシャルを持つ界面モデルに対する流体力学極限, 研究集会「大規模相互作用系の確率解析」, 2008年11月4日, 東京大学
- 4 西川 貴雄, Large deviation for the Ginzburg-Landau $\nabla \phi$ interface model with conservation law, 研究集会「Workshop on Gradient Models and Elasticity」, 2008年6月12日, University of Warwick (イギリス)

- 5 西川 貴雄, Large deviation for the

Ginzburg-Landau $\nabla \phi$ interface model with a conservation law, 研究集会「Hydrodynamics and fluctuations in interacting particle systems」, 2008年3月29日, Budapest University of Technology and Economics (ハンガリー)

6 西川 貴雄, Large deviation for the Ginzburg-Landau $\nabla \phi$ interface model with a conservation law, 研究集会「大規模相互作用系の確率解析」, 2007年10月25日, 九州大学

7 西川 貴雄, Large deviation for the Ginzburg-Landau $\nabla \phi$ interface model with a conservation law, 研究集会「Dirichlet Forms, Stochastic Analysis & Interacting Systems」, 2007年9月20日, Berlin Technical University (ドイツ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西川 貴雄 (NISHIKAWA TAKAO)
日本大学・理工学部・講師
研究者番号: 10386005

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: