

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 1 日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740063

研究課題名（和文）ある種のスペクトルを保存する Banach 環上の作用素とその摂動の安定性
 研究課題名（英文）Certain spectra preserving maps on Banach algebras and the stability of their perturbations

研究代表者

三浦 毅（MIURA TAKESHI）

山形大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：90333989

研究成果の概要（和文）：Molnar によってはじめられた乗法的スペクトル保存写像の研究を、より一般の関数環や単位的半単純可換 Banach 環の場合に拡張した。さらにスペクトルに関する条件を弱め、末梢スペクトルやスペクトル半径を保存する写像に対しても類似の結果が成り立つことを示した。また Banach 空間に値をとる微分可能関数や解析関数のなす関数空間において微分方程式を考察し、その Hyers-Ulam 及び Ger の意味での安定性が成り立つための十分条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：Molnar investigated, what is so called “multiplicatively spectra preserving maps” between C*-algebras, and characterized such maps. We generalized the result by Molnar to such maps between unital, semisimple commutative Banach algebras. In addition, we proved that quite similar results to the above hold for “peripherally multiplicative maps” and “spectra radii preserving maps”. We also investigated some differential equations in Banach space-valued function spaces, and gave a sufficient condition in order that Hyers-Ulam or Ger type stability hold.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,800,000	600,000	3,400,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析学, Banach 環, スペクトル保存, 摂動と安定性

1. 研究開始当初の背景

可換 Banach 環の元を調べるにはフーリエ変換の一般化である Gelfand 変換が重要な道具となる. しかし Gelfand 変換の値域であるスペクトルからは, もとの元の情報を完全に取り出すことは一般に不可能である. それにもかかわらず Molnar は「積のスペクトル保存」という条件を設定することにより, スペクトルからある種の作用素の位相構造及び代数構造が解明されることを示した. その後, どのような空間の間の作用素に対して類似の結果が成り立つのかが問題となった.

2. 研究の目的

本研究では, スペクトルに関する保存条件をノルムやスペクトル半径などに弱め, 関数環や可換 Banach 環, さらにある種の作用素からなる非可換環に対しても, Molnar の定理と同様の結果が成り立つことを示す.

3. 研究の方法

Molnar 結果の興味深い点は, スペクトルの情報だけから作用素の代数的性質と, $C(X)$, $C(Y)$ を可換 Banach 環と見たときの極大イデアル空間 X , Y の位相構造の関連が得られる点にある. 他方において, Luttman and Tonev はスペクトル全体ではなく, peripheral スペクトルといわれるスペクトルの最遠点のみの情報から Molnar の結果が導かれることを示している. つまり重要なのはスペクトルの内側ではなく, その境界部分であり, しかも境界点の中でも原点に近い点は必要ないのである. この結果を踏まえると, スペクトルの中でもより少ない情報から必要な情報を取り出したい, という願望が自然に湧いてくる. 一般に peripheral スペクトルのもつ情報はスペクトルのそれよりも遥かに少ないが, これらの情報はすべて必要不可欠なのであろうか? このようなごく自然な疑問から, peripheral スペクトルを, 原点からの距離であるノルムに置き換えるという発想に至る. まずはスペクトルをノルムに置き換えた場合にも Molnar と同様の結果が得られるかを考察する. その後, ノルム保存写像の摂動を考え, その安定性を調べる必要がある. これらを研究する上で $C(X)$ が重要な情報を含んでいるので, まず $C(X)$ に対する Molnar の結果の拡張を試みる. その結果を土台にして, 正則な関数環, 正則な可換 Banach 環を考察する.

4. 研究成果

可換 Banach 環上の環準同型写像の構造について次の結果を得た. まず可換 Banach 環の間の環準同型写像が全射であるとき, それ

は線型部分, 共役線型部分さらに不連続部分に分割されることを示し, 全射環準同型写像の構造を解明した. この表現により, 正則な可換 Banach 環の環準同型写像による像となる可換 Banach 環は, 自動的に正則であることが得られた. 特に円板環などの解析関数のなす環は, 正則な可換 Banach 環の環準同型写像の像とはなりえないことが分かる. さらにコンパクト Abel 群上の L^p 空間は極大イデアル空間が無限連結集合となる可換 Banach 環の環準同型写像による像とはならないことも示された. これらは Molnar 及び Takahasi and Hatori の結果の精密化である. 摂動とその安定性に関する問題については, 开区間上の複素数値関数に対する微分方程式 $y'(t) = h(t)y(t)$ が Ger の意味で安定性をもつための必要十分条件を関数 h の言葉で与えた. さらに $y'(t) = h(t)y(t)$ が安定性をもつとき, 安定性に関する定数が定まるが, その定数が最良であることも示した. また Hilbert 空間上の自己共役作用素及び正規作用素に対する Hyers-Ulam-Rassias の意味での安定性を考察し, 近似的な自己共役作用素及び正規作用素はそれぞれ真の自己共役作用素, 正規作用素であることを示した. 一方で Hyers-Ulam の意味においては自己共役作用素の安定性が成り立たない例を与え, 正規作用素に対しては安定性が成り立たないことを証明した.

次にスペクトルを保存する写像の構造について次の結果を得た. まず関数環の間の二変数単項式の peripheral スペクトル保存写像の形を, その値域が十分な峰関数を含むときに決定した. 特に二変数単項式の次数の最大公約数が 1 であれば, そのような写像は Banach 環としての等距離同型写像, つまり荷重合成作用素に拡張されることも示した. さらに単位元の存在を仮定しなくとも, そのような関数環の間の peripheral スペクトル保存写像は Banach 空間としての等距離同型写像となることを示した. これは本研究分野を発展させた Luttman and Tonev の結果の拡張となっている. もしも, それらの環がある種の近似単位元を有すれば, それらは Banach 環として等距離同型であることも示した. 一方で近似単位元の存在を仮定しないとき, Banach 空間としては同型であるにも関わらず, Banach 環としては同型でないような例を具体的に構成した. 近年, 非可換 Banach 環上のスペクトル保存写像の研究が活発になされているが, 単一の写像ではなく, 積のスペクトルを保存する写像の組を考えることにより, これまで独立に研究されてきた対号構造を考慮したスペクトル保存写像の研究を統一的に扱う手法を導入した. この研究論文以降, これまでの研究結果の本質が

さらに鮮明になってきている。また摂動の安定性の研究においては、乗法的汎関数の Hyers-Ulam-Rassias の意味での安定性を示すとともに、その写像が近似的環準同型写像であれば、それは真の環準同型写像であるか、または近似的零写像であることを示した。さらに積を一般化し、ある種の二項演算に対して同様の超安定性問題を考察し、その十分条件を与えるとともに、安定性に関する最良定数を決定した。

乗法的にスペクトルを保存する写像の研究は、 $\sigma(S(a)S(b)) = \sigma(ab)$ を満たす全射 S の特徴づけがこれまでに行われてきた。一方で $\sigma(S(a)S(b)^*) = \sigma(ab^*)$ を満たす全射 S の特徴づけは別の研究として独立に進められてきた。ただし $*$ は複素共役を一般化した概念である対号である。我々は $\sigma(S(a)T(b)) = \sigma(ab)$ を満たす全射の組 (S, T) を考察することにより、これまでの研究を統一的に扱うことに成功した。より正確には、単位的半単純可換 Banach 環 A, B の間の全射の組 S, T に対して $r(S(a)T(b)-1) = r(ab-1)$ ($a, b \in A$), $S(1) = T(1) = 1$ が成り立てば、 $S = T$ であり、さらに S は実多元環としての同形写像であることを示した。ここで $r(\cdot)$ はスペクトル半径を表す。このとき、これまで主に調べられてきたスペクトル条件 $\sigma(S(a)S(b)) = \sigma(ab)$ が成り立てば $\sigma(S(a)S(b)-1) = \sigma(ab-1)$ であり、このことより $r(S(a)S(b)-1) = r(ab-1)$ であるから、我々のスペクトル半径に関する仮定は既存の条件よりも弱いものであることが分かる。その後、スペクトルの代わりにスペクトル半径を保存する全射の研究が盛んになされるようになった。我々はスペクトル半径のもとでは加法的な写像は、本質的に実多元環としての同形写像であることを示した。この結果は、Rao, Tonev and Toneva 及び Tonev and Yates の定理の拡張となっている。

最後に、写像の組に対する考察を発展させ、スペクトル半径に関する等距離写像の組の構造を解明した。実際 I を任意の集合とし、 A, B を単位的半単純可換 Banach 環とするとき、全射 S, S' 及び T, T' が $r(T(a)-T'(b)) = r(S(a)-S'(b))$ を満たすとき、 S と T , S' と T' はそれぞれ荷重合成作用素の形で表されることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 31 件 すべて査読有)

[1] O. Hatori, G. Hirasawa and T. Miura, Additively spectral-radius preserving

surjections between unital semisimple commutative Banach algebras, Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), 597—601.

[2] O. Hatori, T. Miura, R. Shindo and H. Takagi, Generalizations of spectrally multiplicative surjections between uniform algebras, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **59** (2010), 161—183.

[3] G. Hirasawa, T. Miura and R. Shindo, A generalization of the Banach-Stone theorem for commutative Banach algebras, Nihonkai Math. J. **21** (2010), 1—10.

[4] O. Hatori, K. Hino, T. Miura and H. Oka, Peripherally monomial-preserving maps between uniform algebras, Meditter. J. Math. **6** (2009), 47—60.

[5] N. Niwa, H. Oka, T. Miura and S.-E. Takahasi, Stability of almost multiplicative functionals, Aust. J. Math. Anal. Appl. **9** (2009), Art. 12, 8 pp.

[6] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity, Tokyo J. Math. **32** (2009), 91—104.

[7] T. Miura, T. Hayata and S.-E. Takahasi, An estimate of the commutativity of C^2 -function and probability measure, J. Math. Inequal. **3** (2009), 169—180.

[8] T. Miura, H. Takagi, M. Tsukada and S.-E. Takahasi, Superstability of generalized multiplicative functionals, J. Inequal. Appl. (2009), Art. ID 486375, 7 pp.

[9] T. Miura and D. Honma, A generalization of peripherally multiplicative surjections between standard operator algebras, Cent. Eur. J. Math., **7** (2009), 479—486.

[10] T. Miura, Ger type stability of the first order linear differential equation for holomorphic functions, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **14** (2009), 707—714.

[11] T. Miura, H. Oka, S.-E. Takahasi and N. Niwa, Ger type stability of the first order linear differential equation $y'(t)=h(t)y(t)$, Tamsui Oxf. J. Math. Sci. **24** (2008), 445—456.

[12] K. Kawamura and T. Miura, On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations, Topology Appl. **154** (2007), 434—442.

[13] T. Miura, S.-E. Takahasi and N. Niwa, Prime ideals and complex ring homomorphisms on a commutative algebra, Publ. Math. Debrecen **70** (2007),

- [14] S.-E. Takahasi, T. Miura and H. Takagi, Exponential type functional equation and its Hyers-Ulam stability, *J. Math. Anal. Appl.* **329** (2007), 1191—1203.

〔学会発表〕（計 24 件）

- [1] T. Miura, *Generalizations of spectrally multiplicative surjections between uniform algebras*, *Function Spaces*, 2010, May 18, Southern Illinois University at Edwardsville (Missouri).
- [2] 羽鳥 理, 三浦 毅, 高木 啓行, 関数環上のある種の値域保存写像, 日本数学会, 2007年9月21日, 東北大学(宮城県仙台市)

6. 研究組織

(1)研究代表者

三浦 毅 (MIURA TAKESHI)

山形大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 90333989

(2)研究分担者

()

研究者番号 :

(3)連携研究者

()

研究者番号 :

