様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月１９日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740069
研究課題名（和文）　微分差分方程式を利用した超幾何関数の公式の導出

研究課題名（英文）　Research of hypergeometric differential-difference equations

研究代表者
小原　功任（OHARA KATSUYOSHI）
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：00313635

研究成果の概要（和文）：

本研究では、超幾何関数の局所的性質（微分差分方程式系）と計算機代数に基づいて公式の導出を行った。A-超幾何関数に対して、A-超幾何微分差分方程式を提案し、さらに微分差分作用素環のグレブナー基底による方法によって、A-超幾何微分差分方程式の次元公式を与えた。またアペル・ロリチェラの超幾何関数に対して新しいタイプの関数等式を導出した。加えてその公式からガウス超幾何関数に対する関数等式も導出した。さらに研究成果の一環として数学ソフトウェアを作成した。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we proved theorems for hypergeometric functions by using hypergeometric differential-difference equations. We studied the rank theory for A-hypergeometric differential-difference equations. We found new transformation formulas for Lauricella's hypergeometric functions of 2 and 3 variables. We developed mathematical software on computer algebra system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	300,000	2,200,000

研究分野：　解析学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析、超幾何関数、微分差分方程式

１．研究開始当初の背景

古典的なガウスの超幾何関数はパラメータをもつ関数である。１９世紀初頭のガウスにはじまり、約２００年の研究の歴史がある。ガウスの超幾何関数は、隣接関係式、クンマーの変換、接続関係式など、さまざまな顕著な性質をもつ。その多数の公式(あるいは公式を導出できるという事実)から具体的に計算に使える関数(特殊関数)という性質があり、古典解析や物理学などで幅広く用いられている。またガウスの超幾何関数のパラメータに特殊な関係を与えたり、特別な極限操作(合流操作)を繰り返すと、直交多項式が現れたりベッセル関数など有用な関数が現れたりもする。そのように深く研究されたガウスの超幾何関数ですら、さらに基本的な公式(関数等式)があることがわかってきたのはごく最近のことである。
(１変数または多変数の)一般の超幾何関数の場合にもその大域的性質から関数等式の存在が強く期待できるのだが、実際の計算が困難であることから一般の超幾何関数の場合にはどのような公式になるかよくわかっていなかった。一般の超幾何関数は代数幾何学における周期積分と深い関係があり、代数方程式の根を表示したり代数曲線をパラメトライズしたり尖点のまわりの様子を調べることができる。一般の超幾何関数について基本的な公式がわかれば個々の代数多様体の性質を調べる強力な道具になる。したがって関数等式を見つけることには価値がある。
従来の研究では代数幾何学的な手法が用いられ超幾何関数の大域的性質が重要な役割を果たしていた。大域的性質はオイラー多重積分によって与えられるが、具体的な計算においては積分核の形が大きく関係しており計算が遂行できるための条件が強すぎて困難な場合が多い。
これらの背景から、発想を転換し従来の方法と異なる微分差分方程式という超幾何関数の局所的性質を用いて計算できないか、という着想に至った。そもそも一般の超幾何関数の中には大域的性質がわかっていないものもあり(通常、局所的性質はわかる)、超幾何微分差分方程式に対する研究の進展は、一般の超幾何関数に対する研究の手がかりにもなる。

２．研究の目的

本研究の目的は、アペルの２変数超幾何関数や、その一般化であるロリチェラの多変数超幾何関数、さらにはより一般の超幾何関数について、従来の方法とは異なる方法、すなわち
・局所的性質(微分差分方程式系)
・計算機代数的手法
を用いて、超幾何関数の公式を導出していくことである。
従来の研究方法は、代数幾何学的手法すなわち超幾何関数の大域的性質(積分表示)を基本にしていたが、この方法では存在は分かるが、実際の導出は技術的に困難な公式があった。しかもこの困難は多くの超幾何関数の一族に共通する性質であるのに研究が進展していなかった。さらに超幾何関数の微分差分方程式または差分方程式はこれまでも研究されてきたが、それと関数等式を結び付ける発想はなかった。
本研究では発想を転換して局所的性質から関数等式を導出することを目指した。つまり、超幾何微分方程式に立ち戻り、またパラメータに関する差分方程式をも同時に考えるという観点に立っている。このアイデアは新しいが超幾何関数のもつ差分的性質からも自然な考えである。また得られる結果は超幾何関数を計算に用いる上での基本的な公式を与えることである。一般の超幾何関数にはさまざまな応用があり、例えば超幾何関数で代数方程式の根を表示したり、代数曲線をパラメトライズしたり、尖点のまわりの様子を調べることができる。関数等式のような基本的な公式がわかることは、このような応用にも影響を与える。さらに先の目標はより一般の超幾何関数の関数等式の導出であった。また一般の超幾何関数の公式には微分差分方程式に由来するものが多くあり、それらを系統的に理解していくのも長期的な目標であった。
超幾何関数の局所的性質を計算機で扱うためには、自作の微分差分作用素環のグレブナー基底エンジンを用いるが、そこからさらに本研究のプランを実行するにはソフトウェアの開発が要求されていた。また、本研究の副産物として数学ソフトウェアへの波及効果・フィードバックも予想されていた。

３．研究の方法

超幾何関数の公式を導出するために、その局所的性質(超幾何微分差分方程式)を用いることを試みた。関数等式の存在は、超幾何関数の大域的性質からわかるが、大域的性質から計算するのが難しいので局所的性質を用いる方法を考案したわけである。
本研究は、超幾何関数の問題でありそもそも近似計算でなく厳密に完全な計算をするために超幾何関数が有効なのであるから、得られるべき公式も近似として得られるのではダメで、厳密に得られる必要がある。このような厳密な計算を計算機の上で実行するために考えられたのが、計算機代数・計算機代数システム(数式処理システム)である。われ

われのプランでは、計算の重要な部分・数学的ツールに、有理関数体係数の微分差分作用素環におけるグレブナー基底計算と、そこから導出可能な一階化した微分差分方程式系（パフ系）の計算を用いる。
計算機代数的手法を用いるときの利点のひとつは、微分差分作用素環用グレブナーエンジン yang をすでにもっていることである。このようなグレブナーエンジンの開発競争が世界中で行われているが、yang は高速であり、他のグレブナーエンジンとちがって微分差分作用素環の係数に有理式をとることができる(多くのグレブナーエンジンは多項式しかとれない)。実はこの特長が本研究のプランの第２のステップの計算を可能としている(一階化した方程式系の計算には有理式係数が必要である)。
一般に計算機代数的手法の弱点として、その計算量の大きさと組み合わせ爆発(メモリ使用量の指数関数的増大)の問題がある。本研究ではこの問題を克服するために分散計算を試みた。すなわち、単独の計算機上で最初から最後まで問題を解くのではなく、複数の計算機上にプログラムを分割し、互いに通信しながら解答を得るという方法である。このようにプログラムを複数の計算機上に分割すると、その結果として一台辺りの計算機のメモリ使用量が減少することが期待されるのは当然であるが、計算機代数的手法の場合には、台数以上の効果を出すことが期待できる場合がある。そのため分散計算可能な数学ソフトウェアを開発する事にした。

４．研究成果

まず最初に多変数超幾何関数のひとつである A-超幾何関数に対し、局所的性質（微分差分方程式系）による次元公式の導出を試みた。
A-超幾何関数とは整数行列 A によって定まる超幾何関数であり、様々な応用（例えば整数計画法への応用）を持つ。A-超幾何関数の満足する微分方程式系は A-超幾何微分方程式と呼ばれている。A-超幾何微分方程式はホロノミー系の一種であり、その解空間の次元の評価を次元理論という。従来の研究から A-超幾何微分方程式では行列 A に関して、例えば Cohen-Macaulay 性といった制約条件がないと解空間の次元と、行列 A の正規化体積との間にズレが生じることが知られていた。
実は A-超幾何関数は隣接関係式と呼ばれる差分方程式をも満たす。われわれは A-超幾何微分方程式からトーリック方程式を取り除き、その代わりに隣接関係式を加えて、微分差分方程式系（A-超幾何微分差分方程式）を構成した。
その結果、A-超幾何微分差分方程式が有限次元の解空間を持つこと（ホロノミー性）がわかった。しかも、特異点に関する条件（例えば regular holonomic） や行列 A の Cohen-Macaulay 性を仮定しなくても、その次元が行列 A の正規化体積と一致すること（ズレが生じないこと）を発見した。
この計算機による発見をもとに解析的手法・代数的手法を組み合わせて定理を証明した。(発表論文１)

さらに超幾何関数に対する新しいタイプの公式（関数等式）の導出を試みた。本研究における数学ソフトウェア開発により超幾何微分差分方程式から一階化した方程式系（パフ系）を求めることができるようになった。そのパフ系に異なる座標変換を施して、しかも変換された結果が一致するようなことが発見できれば、それはパフ系の性質を詳しく調べることになり、また超幾何関数の関数等式の導出に直接的に結びつく。われわれはアペルの２変数超幾何関数とロリチェラの３変数超幾何関数の場合に、プランを実行してそのような座標変換を探索した。その結果、代数的数を含むようないくつかの座標変換の組で、関数等式の導出が可能であることを見出し実際にこれまでに知られていなかった関数等式をいくつか導出した。しかもパラメータを特殊化することで、ガウス超幾何関数に対する新しい公式の導出と、既知の公式の別証明を与えた。これまで意味付けがよくわからなかった公式をより広い観点から理解することを含む結果であり、重要なブレークスルーである。(発表論文２)

また本研究の研究成果から計算機代数への波及効果も見られた。本研究で作成した数学ソフトウェアをもとに、有理数を成分とする行列のスペクトル分解および固有ベクトル計算を行う方法を開発した。われわれの方法は数学的にはスペクトル行列の積分表示に基づくものであり、その事実自体はこれまでにも知られていたが、代数的手法を用いて積分を評価することにより明示的な公式と新しい計算アルゴリズムを得た。しかもその方法による固有ベクトル計算は、既知の計算機代数的手法よりも高速であることがわかった。(発表論文３)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

1. Ohara, K. and Takayama, N., Holonomic rank of A-hypergeometric differential-difference equations,

Journal of Pure and Applied Algebra 213-8 (2009), 1536-1544, 査読有

2. Matsumoto, K. and Ohara, K.,
Some transformation formulas for Lauricella's hypergeometric functions F_D,
Funkcialaj Ekvacioj, 52-2 (2009),
203-212, 査読有

3. Ohara, K. and Tajima, S.,
Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus,
Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009,
COE Lecture Note 22(2009),
Kyushu University, 137-140, 査読有

〔学会発表〕(計 1 件)

1. Ohara, K. and Tajima, S.,
Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus,
The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, 2009年12月14日
JALリゾートシーホークホテル福岡(福岡県)

〔その他〕
ホームページ等
http://air.s.kanazawa-u.ac.jp/~ohara/

６．研究組織
(1)研究代表者
小原 功任(OHARA KATSUYOSHI)
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：00313635