

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740072

研究課題名（和文） 変数係数偏微分方程式の解の漸近解析とその応用

研究課題名（英文） On the asymptotic analysis of partial differential equations with variable coefficients and their applications

研究代表者

廣澤 史彦 (HIROSAWA FUMIHIKO)

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：50364732

研究成果の概要（和文）：本補助金による研究成果は、時間に依存する係数を持つ双曲型偏微分方程式の初期値間の解の漸近挙動に関するものである。本研究の中で新たに導入した漸近解の構成に関する技術を応用することによって、係数の滑らかさの特性を考慮した、より精密な解の漸近挙動の解析が可能となり、波動方程式、消散型波動方程式などのエネルギー評価に関して、従来の研究結果を大きく改善することができた。

研究成果の概要（英文）： We studied the asymptotic behavior of the solution to the Cauchy problems of hyperbolic partial differential equations with variable coefficients. In this research we succeeded to improve the energy estimates for wave equations and dissipative wave equations by applying a new method to construct the asymptotic solutions taking account of the smoothness of the coefficients.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	540,000	3,240,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：エネルギー保存則、エネルギー減衰評価、変数係数、波動方程式、消散型波動方程式

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式において、その係数が定数である場合と変数である場合とでは、解の挙動が大きく異なる場合がある。波動方程式を代表とする双曲型偏微分方程式の初期値問題において、時間変数に依存する係数は外力の変化を記述するため、その解は定数係数の場合と全く異なる挙動をする可

能性がある。特に、係数が振動や退化をする場合、ある種の共鳴現象や方程式の構造そのものが変化する可能性があるため、これら変数係数ならではの特性を解析しようとする場合、定数係数からの摂動という立場からの従来の手法では不十分である。ここで、特に最も単純は波動方程式と、より一般の2回双曲型方程式に関しては、次

のような研究の背景があった。

- (1) 波動方程式において、係数が時間変数に依存しない場合、解の総エネルギーは時間発展に関して保存される。しかし、伝播速度を変化させる外力の影響を考慮し、係数が時間に依存して変化するモデルでは、一般にエネルギー保存則は成り立たない。更に、係数が微分可能でない程度に外力の時間変化が急激な場合には、その特異性が初期値の微分可能性を奪い、エネルギーが有限時間で爆発するような状況も起こりうる。このように、変数係数波動方程式の解の性質は、係数が微分可能であるか否かによって大きく異なる。実際、係数が微分可能でないことによって引き起こされる解の特異性については、既に詳細な研究結果がある。しかしその一方で、係数が微分可能、さらに高回微分可能な場合に、それが解の性質にどのように寄与するのかを考察した結果はほとんど存在していなかった。

- (2) 本研究開始前年度までの本研究代表者らによる研究によって、変数係数波動方程式、および、より一般の2階双曲型方程式の適切性の問題において、係数の2回微分可能性が本質的に意味を持つ幾つかの研究結果が得られていた。しかし、それを超える係数の滑らかさが寄与する研究結果は存在していなかった。

2. 研究の目的

- (1) 伝播速度が時間に依存する波動方程式の初期値問題において、係数の高回微分可能性がより精密なエネルギー評価に寄与するための条件を明らかにする。

- (2) 消散型波動方程式の初期値問題において、時間に依存する消散係数の高回微分可能性が、エネルギー減衰評価に寄与するための条件を明らかにする。

- (3) 弱双曲型方程式において、係数の滑らかさと退化のオーダーが Gevrey 適切性に与える影響を明らかにする。

3. 研究の方法

本研究の基礎となっているのは、本研究代表者による2006年の研究成果 (F. Hirose, Global solvability for Kirchhoff equation in special classes of non-analytic functions. J. Differential Equations. 230 (2006), no. 1, 49-70) において導入された、Liouville 型常微分方程式に対する係数の高回微分可能性を用いた新たな漸近解の構成方法である。これを偏微分方程式の解

析に応用することにより、特に高周波領域において、解の精密な解析が可能となる。しかし、実際に上記の(1)~(3)の目的を達成するためには次の問題を解決する必要がある。

- (Q1) 低周波領域の評価をいかにして行うか。
- (Q2) Liouville 型に帰着できない消散型波動方程式をどのように扱うか。
- (Q3) 弱双曲型方程式の場合、係数の退化によって生ずる特異性をどのように評価するか。

これらの問題を次のように解決した。

- (A1) 低周波領域における解の評価のため、係数の性質を特徴づける新たな仮定 (stabilization property) を導入する。
- (A2) 消散型波動方程式に対して、特定の時間周波数領域で Liouville 型方程式への帰着が有効なある種の変換を導入する。
- (A3) 弱双曲型方程式に対して、係数の退化と振動の影響を効果的に取り出すために、特定の時間周波数領域においてそれぞれ異なる方法で評価を行う。

4. 研究成果

- (1) 伝播速度が時間に依存する波動方程式の初期値問題において、係数の振動量に関するある種の安定性条件 (stabilization property)のもと、その係数の高回微分可能性がエネルギーの精密なエネルギー評価に連続的に寄与することを証明した (①②⑦)。
- (2) 変数係数消散型波動方程式の初期値問題において、係数の滑らかさに応じた精密なエネルギーの減衰評価を行った (⑥)。
- (3) 係数が特異性を持つ波動方程式の初期値問題に対して、係数の滑らかさに応じた Gevrey 適切性を証明した (⑤)。
- (4) 係数が特異性を持つ p 型発展方程式の初期値問題の C^∞ 限適切性に関する幾つかの結果を証明した (③④)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① F. Hirose, Generalized energy conservation for wave equations with time-dependent coefficients under stabilization properties. Further progress in analysis, 査読有, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, 444-453.
- ② F. Hirose and J. Wirth, Generalised energy conservation law for the wave equations with variable propagation speed. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 査読有, 358 (2009), no. 1,

56-74.

- ③ M. Cicognani, F. Hirose and M. Reissig, Loss of regularity for p-evolution type models. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 査読有, 347 (2008), no. 1, 35-58.
- ④ M. Cicognani, F. Hirose and M. Reissig, M., The Log-effect for p-evolution type models. Journal of the Mathematical Society of Japan. 査読有, 60 (2008), no. 3, 819-863.
- ⑤ M. Cicognani and F. Hirose, On the Gevrey well-posedness for second order strictly hyperbolic Cauchy problems under the influence of the regularity of the coefficients. Mathematica Scandinavica. 査読有, 102 (2008), no. 2, 283-304.
- ⑥ F. Hirose and J. Wirth, C^m -theory of damped wave equations with stabilisation. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 査読有, 343 (2008), no. 2, 1022-1035.
- ⑦ F. Hirose, On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients. Mathematische Annalen. 査読有, 339 (2007), no. 4, 819-839.

[学会発表] (計 15 件)

- ① 廣澤史彦 and C. Böhme, “Generalized energy conservation for Klein-Gordon equations with effective mass terms”, 発展方程式シンポジウム, 東海大学理学部 (March 10-12, 2010).
- ② 廣澤史彦 and C. Böhme, “Gevrey class の係数を持つ Klein-Gordon 型方程式のエネルギー評価”, 松山キャンプ, 愛媛県総合社会福祉会館 (January 4-7, 2010).
- ③ 廣澤史彦, “Energy estimates for wave equations with time dependent propagation speeds of Gevrey class”, 微分方程式の総合的研究, 東京大学 (December 18-19, 2009).
- ④ 廣澤史彦, “Kirchhoff 方程式と変係数波動方程式”, 八王子偏微分方程式研究集会, 八王子セミナーハウス (October 9-11, 2009).
- ⑤ F. Hirose, “Wave equations with time depending propagation speed”, 17th ICFIDCAA at Ho Chi Minh City University of Pedagogy, Ho-Chi-Minh, Vietnam (August 3-8, 2009).
- ⑥ F. Hirose, “Wave equations with time dependent coefficients”, 7th ISAAC Congress (Dispersive Equations) at Imperial College London, London, UK (July 13-18, 2009).

- ⑦ 廣澤史彦, “変係数波動方程式の解の安定性について”, 日本数学会 2009 年度年会, 関数解析学分会, 東京大学 (March 26-29, 2009).
- ⑧ 廣澤史彦, “Energy estimates for wave equations with time dependent coefficients”, 24th 松山キャンプ, 山口大学 (March 14-16, 2009).
- ⑨ 廣澤史彦, “Gevrey class の係数を持つ波動方程式のエネルギー評価について”, 米子偏微分方程式研究集会, 米子高専 (October 11-13, 2008).
- ⑩ 廣澤史彦, “Generalized energy conservation law for the wave equations with time dependent propagation speed”, 広島微分方程式研究集会, 広島大学 (October 10-11, 2008).
- ⑪ F. Hirose, “On wave equations with time dependent coefficients of the Gevrey class”, Scientific program of the workshop “Evolution equations” at TU Bergakademie Freiberg, Freiberg, Germany (October 1-2, 2008).
- ⑫ 廣澤史彦 and J. Wirth, “ C^m -theory of damped wave equations with stabilization”, 日本数学会 2008 年度年会 関数方程式論分会, 近畿大学 (March 22-26, 2008).
- ⑬ F. Hirose and J. Wirth, “ C^m -theory of damped wave equations with stabilization”, International Symposium “Function Spaces and Partial Differential Equations” at Osaka University, Japan (February 18-20, 2008).
- ⑭ 廣澤史彦, “On the asymptotic behavior of the solutions for second order ordinary differential equations with variable coefficients”, 山中湖偏微分方程式研究集会, 東海大学山中湖セミナーハウス (October 6-8, 2007).
- ⑮ F. Hirose, “On the well-posedness for second order weakly hyperbolic Cauchy problems under the influences of the regularity of the coefficients”, 6th ISAAC Congress (Dispersive Equations) at Middle East Technical University, Ankara, Turkey (August 13-18, 2007).

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://web.cc.yamaguchi-u.ac.jp/~hirosawa/index.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣澤 史彦 (HIROSAWA FUMIHIKO)

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：50364732

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし