

研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19740073
 研究課題名（和文） 非線形ラプラシアンを含む発展方程式の研究

研究課題名（英文） Research on evolution equations involving nonlinear Laplace operators

研究代表者

赤木 剛朗 (AKAGI GORO)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：40433768

研究成果の概要（和文）： p -ラプラシアンを含む発展方程式の時間局所解の存在に対する十分条件を、従来の結果に比べてより精密に導出した。また無限大ラプラシアンを含む発展方程式の適切性を証明し、解の減衰レートなど漸近挙動を明らかにした。さらに、これらの研究を通して非線形ラプラシアンを含む発展方程式の解の構成や長時間挙動の解析に対して幾つかの有効な手法を提案している。

研究成果の概要（英文）：Sufficient conditions for the existence of local (in time) solutions of some evolution equations involving p -Laplace operators are obtained. Moreover, the well-posedness of some evolution equation involving the infinity-Laplace operator is proved, and furthermore, the asymptotic behaviors (e.g., decay rates) of solutions are also revealed. Finally, a couple of effective methods are established in order to construct solutions and analyze their large-time behaviors for evolution equations involving nonlinear Laplace operators through this research project.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	540,000	3,440,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式，非線形偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

非線形ラプラシアンとはよく知られた線形のラプラシアンから派生した非線形楕円型微分作用素を指し、 **p -ラプラシアン**や**無限大ラプラシアン**などが代表的である。非線形ラプラシアンは様々な非線形現象の数学

モデルに現れ、それぞれの現象に固有な性質を記述するために重要な役割を担っている。その一方、線形のラプラシアンを含む発展方程式に対して開発された幾つかの手法は、強い非線形性や退化性・特異性を有する非線形ラプラシアンを含む発展方程式には適用で

きず、そのため解の存在など多くの基本的な問題が未だ解決されていない。

2. 研究の目的

本研究では、非線形ラプラスアンを主要項に持つ発展方程式の適切性（解の存在・一意性・初期値に対する連続依存性）及び解の漸近挙動を解析する。また、それらを通して非線形ラプラスアンを含む非線形発展方程式の解析に有効な新しいフレームワークの開発を目指す。

3. 研究の方法

ここでは非線形ラプラスアンを含む発展方程式に関する研究課題として以下の(1)–(4)を挙げる。これらを明らかにすると共に、非線形ラプラスアンを含む発展方程式の解析に有効な数学的手法を確立していく。

(1) p -ラプラスアンを主要項に持ち爆発項を伴う発展方程式に対して、初期値の可積分性と爆発項の増大度および拡散項である p -ラプラスアンの指数 p の関係から、時間局所・大域解の存在に対する十分条件を模索する。また解の漸近挙動についても、エネルギー法および相平面の方法を用いて解析を行う。

(2) 無限大ラプラスアンを主要項に持つ発展方程式の適切性を証明する。その後、解の比較原理を用いて解の長時間挙動を明らかにする。

(3) 指数 p を無限大に発散させたときの p -ラプラスアンの極限と無限大ラプラスアンの関係を、それらを主要項を含む発展方程式の解の挙動という観点から調べる。

(4) その他、研究の過程で派生した問題を随時とりあげ解析する。

これらの研究課題で得られた結果を国内外の研究会・学会で発表し、専門家と意見交換を行うことで今後の研究に対する指針を得る。また、結果をまとめて査読有の国際誌に投稿する。

4. 研究成果

以下では、「3. 研究の方法」で挙げた(1)–(4)の研究課題に関して、研究期間中に得られた結果の概要を説明する。

(1) 2007年度に、 p -ラプラスアンを含む爆発項付き発展方程式の r 乗可積分な初期値に対する時間局所解の存在定理を証明した。ここで得られた結果は半線形熱方程式でよく知られている F.B. Weissler の局所

解の存在定理を退化放物型方程式に一般化するものである。ただし、準線形かつ退化した方程式の場合、Weissler が用いた積分方程式によるアプローチは適用できない。そこで、本研究では劣微分作用素を含む発展方程式の理論とエネルギー法を発展させ、さらに解の詳細な評価を得ることで時間局所解の構成を行っている。ここでの研究結果は論文[7]にまとめて発表済みである。

また、小さな初期値に対する時間大域解の存在も証明している。解の漸近挙動に関しては、既存の研究の枠組みを大きく超える結果が得られなかったため、論文にまとめるには至っていない。時間大域解の存在に関する研究結果は現在論文として取りまとめている途中である。

(2) 2007年度に、無限大ラプラスアンを含む発展方程式の粘性解の存在、一意性、初期値に対する連続依存性を証明した。証明は、古典解が存在する近似問題を導入し、その解の一意評価を行い、コンパクト埋蔵定理と粘性解の安定性を用いることによってなされている。無限大ラプラスアンを含む発展方程式の研究はそれまでほとんどなされておらず、本研究が草分け的な位置にある。ここでの研究結果は論文[5]に於いて発表されている。

解の漸近挙動については、以下の3つの場合について研究している。

- ① 全空間領域・初期値がコンパクトな台を持つ場合
- ② 有界領域・斉次ディリクレ境界条件を伴う場合
- ③ 有界領域・非斉次ディリクレ境界条件を伴う場合

まず2007年度は、①、②に関して解の最適な減衰オーダー（冪オーダー）を求めることに成功した。さらに③について定常解の非退化性を仮定すると、解が指数オーダーで定常解に収束することが示された。またこの条件下における収束オーダーの最適性も示唆されている。証明では、①、②でそれぞれ自己相似および変数分離な優解・劣解を新たに構成している。③では、非線形な主要項を持つ発展方程式の非斉次ディリクレ問題の長時間挙動の解析に有効なバリア関数の作り方が提案されており、この手法は無限大ラプラスアンに限らず、非線形ラプラスアンを含む多くの発展方程式に適用が可能である。

2008年度は、①に対する解の L_p ノルムの最適な減衰評価を得た。特に L_∞ ノルムの減衰速度が空間次元に依らないことを示し、またそのメカニズムを数学的観点から明らかにした。また、③で仮定していた解の収

束先の定常解の非退化性を外した場合について、解が少なくともある冪オーダーで定常解に収束することが証明された。ここで導入された証明の方法は、定常問題の解（無限調和関数と呼ばれる関数）に対する最新の近似理論に基づいており、この理論を発展方程式へ応用した最初のものである。これらの研究結果は論文[3]に於いて発表されている。

(3) 2007年度に、指数 p を無限大にしたとき、 p -ラプラシアンを含む発展方程式の解が、無限大ラプラシアンを含む発展方程式の解に収束することを証明している。また、この問題が p を 1 に収束させたときの極限問題が平均曲率方程式と密接な関係を持っていることが分かっており、現在、研究を進めているが、研究期間中には部分的な結果しか得られなかった。

(4) 当初予定されていた研究のほかに、以下の課題について派生研究がなされている。これらの多くは今後の研究課題への予備研究に当たるものであり、2010年度以降の科学研究費研究課題で本格的に取り組まれる予定になっている。

- ① p -ラプラシアンを主要項に持つ退化・特異放物型方程式の解の時間大域的挙動について研究した。減衰解の漸近形を明らかにし、また漸近形に対する安定性・不安定性の概念を導入し、空間1次元の場合に対して安定性解析を実施している。ここで得られた結果は、初期値に符号変化する摂動を与えた場合の解の漸近形の安定性・不安定性を考えているため、定符号解の安定性について既存の研究で知られている事実よりも強い主張と言える。また符号変化する漸近形がすべて不安定であることも証明している。特に $1 < p < 2$ の場合はエネルギー空間内の曲面上の力学系を導入することで、漸近形の安定性に関する数学的構造を明らかにすることに成功している。ここで導入した力学系を用いる方法は、他の特異性を有する拡散方程式への応用も可能である。
- ② WED 汎関数と呼ばれる発展方程式に対する変分的アプローチが近年提案されているが、本研究では二重非線形発展方程式に対して同アプローチを拡張した。具体的には、ある変分問題の臨界点として近似解を与え、その極限として元の問題の解を得る。そのため、変分法で知られている手法を発展方程式へ応用することが可能になった。今後は、周期問題やコンパクト性が破れる摂動問題

など、既存の（二重非線形）発展方程式に対する手法では明らかにできなかった問題への取り組みが課題となる。

その他、関連分野の研究者の交流と若手研究者育成を目的として以下の研究会を主催した。

- ・ 談話会@芝浦工大(2007, 2008), 芝浦工業大学数理科学科・談話会(2009) 不定期開催(2009年度は年8回程度)。後者は世話人の一人として運営に参加した。今後も継続して開催予定。
- ・ 第31回発展方程式若手セミナー 2009年8月31日から9月3日まで、埼玉県にある国立女性教育会館にて開催。参加者70名。幹事を担当。
- ・ 国際会議「Evolution Equations and Related Topics」 2009年10月10日から12日まで、早稲田大学西早稲田キャンパスで開催。参加者約200名。組織委員会の一員。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計9件)

- [1] Goro Akagi, Ulisse Stefanelli, A variational principle for doubly nonlinear evolution, Applied Mathematics Letters, 査読有, to appear (online available). 2010
- [2] Goro Akagi, On some doubly nonlinear parabolic equations, "Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics," GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, vol. 32, 査読有, 2010, pp.239-254.
- [3] Goro Akagi, Petri Juutinen, Ryuji Kajikiya, Asymptotic behavior of viscosity solutions for a degenerate parabolic equation associated with the infinity-Laplacian, Mathematische Annalen, 査読有, vol.343, no.4, 2009, pp.921-953.
- [4] Goro Akagi, Energy solutions of the Cauchy-Neumann problem for porous medium equations, "The Seventh International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations," a supplement volume of Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, 2009, pp.1-10.
- [5] Goro Akagi, Kazumasa Suzuki,

Existence and uniqueness of viscosity solutions for a degenerate parabolic equation associated with the infinity-Laplacian, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読有, vol. 31, no. 4, 2008, pp. 457-471.

- [6] Goro Akagi, Doubly nonlinear evolution equations in reflexive Banach spaces, "Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation," GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, vol. 29, 査読有, 2008, pp.19-36.
- [7] Goro Akagi, Local existence of solutions to some degenerate parabolic equation associated with the p-Laplacian, Journal of Differential Equations, 査読有, vol.241, 2007, no. 2, 2007, pp. 359-385.
- [8] Goro Akagi, Kazumasa Suzuki, On a certain degenerate nonlinear parabolic equation associated with the infinity-Laplacian, "The Sixth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations," a supplement volume of Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, 2007, pp. 18-27.
- [9] Goro Akagi, Doubly nonlinear evolution equations with non-monotone perturbations, Proc. Appl. Math. Mech., 査読有, vol. 7, no.1, 2007, pp. 2040047-2040048.

[学会発表] (計 7 件)

- [1] 赤木 剛朗, Maximal monotonicity for the sum of two maximal monotone operators in L_p -spaces, 日本数学会 2010 年度年会, 実関数論分科会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 26 日.
- [2] 赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Asymptotic profiles of sign-changing solutions for parabolic equations associated with p-Laplacian, 日本数学会 2010 年度年会, 関数方程式論分科会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 26 日.
- [3] 赤木 剛朗, Energy solutions of porous medium equations with Neumann boundary conditions, 日本数学会 2009 年度年会, 実関数論分科会, 東京大学, 2009 年 3 月 26 日.
- [4] 赤木 剛朗, On generalized Allen-Cahn equations, 日本数学会 2008 年度秋期総合分科会, 実関数論分科会, 東京工業大学, 2008 年 9 月 27 日.

[5] 赤木 剛朗, Petri Juutinen, 梶木屋 龍治, Asymptotic behavior of solutions for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous Dirichlet data, 日本数学会 2008 年度秋期総合分科会, 関数方程式論分科会, 東京工業大学, 2008 年 9 月 26 日.

[6] 赤木 剛朗, Generalized semiflows and global attractors for a nonlinear evolution inclusion, 日本数学会 2008 年度年会, 実関数論分科会, 近畿大学, 2008 年 3 月 25 日.

[7] 赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Asymptotic behavior of viscosity solutions for a parabolic equation involving the infinity-Laplacian, 日本数学会 2007 年度秋期総合分科会, 関数方程式論分科会, 東北大学, 2007 年 9 月 24 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

個人

<http://www.mcs.se.shibaura-it.ac.jp/~goro/>

第 3 1 回発展方程式若手セミナー

<http://www.mcs.se.shibaura-it.ac.jp/wakate31/>

国際会議「Nonlinear Evolution Equations and Related Topics」

<http://www.mcs.se.shibaura-it.ac.jp/conf/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

赤木 剛朗 (AKAGI GORO)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号: 4 0 4 3 3 7 6 8

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし