様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　３月２５日現在

機関番号：３５３０２
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００７～２０１０
課題番号：１９７４００７８
研究課題名（和文）　複素領域における特異１階偏微分方程式に対するジュブレイ理論

研究課題名（英文）　Gevrey theory for singular first-order partial differential equations in complex domains

研究代表者
日比野　正樹（HIBINO MASAKI）
岡山理科大学・工学部・准教授
研究者番号：１０４４１４６１

研究成果の概要（和文）：特異点を持つ１階偏微分方程式において、その特異点を中心とする形式冪級数解が一意的に存在するための条件を、方程式から定まる或る行列の固有値に対する条件の形で与え、さらにその形式解が収束するための条件も与えました。また、形式解が発散する冪零型と呼ばれる線型方程式において、その発散解が総和可能となるための条件を、方程式の係数に対する大域的条件（解析接続性、増大または減少性）の形で与えることに成功しました。

研究成果の概要（英文）：We studied first-order partial differential equations with singular points. Firstly, we gave conditions which ensure the existence and the uniqueness of formal power series solutions centered at the singular point, in forms of those for eigenvalues of some matrix determined by equations. Moreover, we gave conditions which assure the convergence of the formal solution. Secondly, we considered the linear equations called of nilpotent type, whose formal solution diverges, and we gave conditions under which the divergent solution is summable, in forms of global conditions (analytic continuation property, growth conditions or decreasing conditions) for coefficients of equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	700,000	0	700,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１０年度	800,000	240,000	1,040,000
総　計	3,000,000	690,000	3,690,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式論、複素解析、発散級数、総和可能性、解析接続、関数空間論、縮小写像

１．研究開始当初の背景

(1)　２変数冪零型と呼ばれる１階の線型偏微分方程式に対して、その原点を中心とした形式的冪級数解を考えたとき、それは一意的に存在するが、収束解ではなく発散解である、という、研究代表者（以下、「代表者」と略記）によって１９９９年に証明された事実があります。そこで次に、その発散解を漸近展開に持つような真の解（漸近正則解）が存在するか、という問題が生じます。漸近正則解の存在領域の開きを大きくすると、一般に存在は期待出来ませんが、存在するならばそれ

は一意的であることが知られており、このとき発散解は Borel 総和可能と呼ばれ、漸近正則解は Borel 和と名付けられています。そこで、方程式の係数がどのような条件を満たせば発散解が Borel 総和可能となるか、という問題を、方程式を徐々に一般化させながら研究してきました。しかしながら、本研究の研究開始当初、まだ方程式の完全な一般化に到達しておらず、理論の適用範囲を拡げるためにも、この一般化を達成する必要がありました。

このような、偏微分方程式の発散解に対する Borel 総和可能性の問題は、１９９９年に D.A.Lutz 氏、R.Schäfke 氏、三宅正武氏による熱方程式に対する共同研究によって初めて取り上げられ、それ以来、偏微分方程式の発散解が Borel 総和可能となるための条件を求めることが、漸近展開理論における一つの重要な研究課題になっています。例えば代表的なものに、W.Balser 氏、三宅正武氏による、熱方程式を一般化した或る定数係数の高階方程式の研究（１９９９年、２００４年）があります。代表者の扱っている方程式は彼らの扱ったものとはタイプの異なる変数係数の方程式であり、先に述べた方程式の完全な一般化を達成することは、漸近展開理論を発展させるという観点からも、重要な研究課題となっていました。

(2) 一般に、複素解析的微分方程式において、その特異点を中心とした形式的冪級数解（以下、「形式解」と略す）を考えたとき、一般にはその存在は保証されません。また、仮に存在したとしても、その一意性や収束性等は一般には保証されません。そこで、これまで代表者は、特異点が原点の場合に「如何なる条件の下で形式解が一意に存在するか」「そのとき、もし形式解が発散するならば、その発散の大きさはどれほどか」という問題を、一般的な１階偏微分方程式に対して研究してきました。１９９９年に方程式が線型の場合を扱い、２００４年に半線型の場合、２００６年に準線型の場合と、徐々に方程式の非線型度を上げながら研究を続けて来ました。本研究の研究開始当初は、これ以上の非線型化はなされておらず、さらに非線型度を上げるという課題が残されていました。

上記の研究は、もともと、原点を特異点とする線型偏微分作用素の核と余核を求めるという、大島利雄氏による１９７３年の研究結果を一般化する目的で始めたものです。これまで、代表者以外にも、R.Gérard 氏、田原秀敏氏、三宅正武氏、吉野正史氏等によって、様々な立場からの一般化が試みられて来ました。代表者のこれまでの研究は、彼らの研究の部分的な一般化となっていましたが、方程式の非線型度を下げていたため、完全な一般化とはなっていませんでした。そこで、彼らの研究の一般化という観点からも、さらに方程式の非線型度を上げる必要がありました。

２．研究の目的

(1) 最も一般的な２変数冪零型１階線型偏微分方程式において、その発散冪級数解が Borel 総和可能となるために方程式が満たすべき十分条件を、これまでの研究の一般化となるような形で求める。さらにその条件が技術的なものではなく本質的なものであることを示すために、条件が成り立たず、発散解が Borel 総和可能とならないような反例を構成する。

(2) 原点を特異点とする一般の１階非線型偏微分方程式に対して、形式解が一意的に存在するために方程式が満たすべき十分条件を与え、さらにそのとき形式解が発散するのであれば、その発散の大きさを Gevrey 度と呼ばれる指数を用いて正確に求める（Maillet の問題の研究と呼ばれている)。また、過去の線型、半線型、準線型方程式に対する結果（特に形式解の Gevrey 度に関する結果）を、より精密化させる。

３．研究の方法

(1) ２変数冪零型方程式における発散解の Borel 総和可能性の研究：本研究開始当初までの研究により、「形式解が Borel 総和可能となるための条件は、方程式に形式的 Borel 変換と呼ばれる変換を施して得られる或る１階線型偏微分作用素の特性曲線の形と深く関係している」ことが分かっています。そこでまず、この特性曲線の具体的表示を得ることを目標に研究を進め、その表示が得られたのち、それを用いて方程式の係数が満たすべき条件を予想します。

予想結果の証明方法：一般的に、微分方程式の発散解が Borel 総和可能であることの証明は、方程式に形式的 Borel 変換を施して得られる方程式の解が、或る方向に無限遠方にまで解析接続されて、指数関数増大度を持つことの証明に帰着されます。この方程式は、上記の特性曲線の具体的表示が得られていれば、合成積方程式、さらにはそれと同値な無限階積分方程式の形で具体的に書き表すことが出来ます。そこで、この２通りの形の方程式を導き出したのち、解の解析接続可能性の証明は合成積方程式を評価することによって行い、解の指数関数増大性の証明は無限階積分方程式を評価することによって行います。

(2) 一般の１階非線型偏微分方程式における Maillet の問題の研究：まず形式解の一意

存在については、本研究開始当初までの研究により、「方程式の線型主要部の Jacobi 行列の固有値が“Poincaré 条件”と“非共鳴条件”を満たしている場合、方程式の係数の零点の位数に対する何らかの条件を付加すれば保証される」ことが予想出来ていました。そこで、この付加すべき条件を、幾つかの例を検証しながら予想します。次に、形式解の Gevrey 度については、これも本研究開始当初までの研究により、「微分作用素の Newton 図形を適切に定義することが出来れば、その Newton 図形から定まる値として決定される」と考えていました。そこで、まず Newton 図形の定義を確立させ、それを用いて実際に形式解の Gevrey 度を予想します。

予想結果の証明方法：過去の研究で用いられた証明方法は、Gevrey 型発散（または収束）冪級数のなす空間に重み付き L_1-ノルムを導入して Banach 空間（さらには Banach 代数）を構成し、縮小写像の原理を適用して証明する、というものでした。今回の研究においても同じ方法を採用します。その際、適切なノルムを選ぶことが出来るかどうかが鍵となります。L_1-ノルムのみにこだわらず、一般の L_p-ノルムを用いることも視野に入れて、縮小写像の原理を適用出来るノルムを見つけることを目指します。

４．研究成果

(1) ２変数冪零型方程式における発散解の Borel 総和可能性の研究（２００７年度及び２００８年度に実施）:「３．研究の方法（１）」で述べた通り、本研究開始当初は、最も一般的な線型方程式を扱い、方程式に形式的 Borel 変換を施して得られる１階線型偏微分作用素の特性曲線に対して、その具体的表示を得ることを目標に研究を進めました。しかしながら、この具体的表示を得ることが非常に困難であったため、予定を一部変更し、係数の一般性を少し犠牲にして、やや特殊な方程式を扱うことにしました。この特殊化の結果、特性曲線の具体的表示を得ることが可能になり、またそれを基に、発散解が Borel 総和可能となるために方程式の係数が満たすべき条件を予想することも可能になりました。そして最終的に、「発散解の Borel 総和可能性は、方程式の係数に対する“或る種の”解析接続可能性と、その偏導関数に対する“或る種の”増大（または減少）度によって保証される」という結果の証明に成功しました。２００７年度の研究で扱った方程式は、その特殊性がかなり強いものでした（雑誌論文①、学会発表④⑤⑥）が、２００８年度の研究で、方程式のさらなる一般化に成功しています（学会発表③）。上記の“或る種の”と書かれた部分を実際に具体的な形で書き表すことが可能になったことが、最も重要な研究成果です。

本研究で存在の保証された漸近正則解（Borel 和）の存在領域としては、原点の近くに収まる局所的なものを考えています。従って、今回の研究によって「局所解の存在が大域的条件によって保証される」という興味深い事実が得られたことになります。

発散解の Borel 総和可能性の問題は、常微分方程式論においては既に多くの数学者によって研究がなされており、体系的な理論がほぼ完成されています。一方、偏微分方程式論においては、研究者の数が多くないということもあり、まだそれほど研究は進んでおりません。今回の研究によって、この分野の研究の発展にわずかに貢献出来たのではないかと考えております。

しかしながら、研究開始当初の目標であった「方程式の完全な一般化」は達成されていませんので、課題は残されています。今後は、（ア）方程式は線型のままで当初の計画通り一般化を目指す；（イ）方程式の特殊性は維持したまま非線型化を目指す；の二つの方向から研究を進めていくことを検討しております。

(2) 一般の１階非線型偏微分方程式における Maillet の問題の研究（２００９年度及び２０１０年度に実施）：研究対象となる方程式は、その線型主要部のなすベクトル場のヤコビ行列の固有値の値に応じて、（ⅰ）どの固有値も零でない；（ⅱ）固有値が全て零；（ⅲ）零でない固有値と零固有値が混在する；の３タイプに分けることが出来ます。

① ２００９年度は（ⅰ）のタイプの方程式を扱い、「上記の零でない固有値が“Poincaré 条件”と“非共鳴条件”を満たし、さらに方程式の係数の零点の位数が“或る一定の数値”以上であれば、形式解が一意に存在し、さらにその形式解は収束する」という結果の証明に成功しました。上記の“或る一定の数値”を明確な形で書き表すことが出来たことが、最も重要な研究成果です。

結果の証明は、「３．研究の方法（２）」で述べた通り、収束冪級数のなす空間に適切なノルムを導入して Banach 空間を構成し、縮小写像の原理を用いて行いました。その際、過去の研究で使用してきたノルムが証明に適さず、新しいノルムを探す必要に迫られました。この新しいノルムを見つけられたことも、２００９年度の研究成果の重要な部分です。

本研究で得られた結果は、２０００年に三宅正武氏と白井朗氏によって優級数法を用いて証明された結果と論理的に同値であり、その意味で、彼らの結果の別証明を与えたことにもなります。

本研究の研究成果を「学会発表①②」において公表致しました。

② ２０１０年度は、当初は（ⅱ）のタイプの方程式に対する研究の完結を目指して研究を進めました。そしてまず形式解の一意存在について「方程式の係数の零点の位数が“或る一定の数値”以上であり、かつ“非共鳴条件”を方程式が満たせば、形式解は一意に存在する」という結果の証明に成功しました。ここでも①の研究と同様、“或る一定の数値”を明確な形で書き表すことが出来たことが、最も重要な研究成果です。

（ⅱ）のタイプの方程式の場合、一般に上記の形式解は発散するため、その Gevrey 度を求めることが漸近展開の研究を進めていく上で重要となるのですが、時間の都合上、その研究は断念しました。しかしながら、形式解の一意存在条件については、（ⅰ）（ⅱ）のタイプの方程式に対する研究成果を応用することにより、当初予定していなかった（ⅲ）のタイプの方程式に対しても求められる見通しが立ちました。そこで、研究計画を一部変更して（ⅲ）のタイプの方程式を扱い、「（ⅱ）のタイプの方程式に課した条件に加え、さらに上記の零でない固有値が“Poincaré 条件”を満たせば、形式解は一意に存在する」という結果の証明に成功しました。

いまだ形式解の Gevrey 度の予想及びその証明という課題が残されており、研究成果としては不十分ですが、形式解の一意存在条件を求めるという一つの目標に関しては、全てのタイプの方程式に対して達成することが出来ました。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
①著者名：Masaki HIBINO
論文標題：Summability of formal solutions for singular first-order linear PDEs with holomorphic coefficients
雑誌名：RIMS Kokyuroku Bessatsu
査読の有無：査読有り
巻：１０
発行年（西暦）：２００８年
ページ：４７－６２

〔学会発表〕（計６件）
①発表者名：日比野　正樹
発表標題：特異１階偏微分方程式に対する形式的冪級数解の収束について…三宅・白井の定理の不動点定理による証明…
学会等名：２０１０日本数学会年会
発表年月日：２０１０年３月２４日
発表場所：慶応義塾大学

②発表者名：日比野　正樹
発表標題：Convergence of formal solutions for singular first-order non-linear PDEs --- Proof of Miyake-Shirai’s theorem by the fixed point theorem ---
学会等名：第２回　名古屋微分方程式研究集会
発表年月日：２０１０年３月１７日
発表場所：名古屋大学

③発表者名：日比野　正樹
発表標題：Summability of formal solutions for singular first-order linear PDEs with holomorphic coefficients II
学会等名：Microlocal Analysis and Related Topics
発表年月日：２００９年１０月１９日
発表場所：関西学院大学

④発表者名：日比野　正樹
発表標題：Borel summability of divergent solutions for singular 1st order linear PDEs with holomorphic coefficients
学会等名：２００８日本数学会年会
発表年月日２００８年３月２３日
発表場所：近畿大学

⑤発表者名：日比野　正樹
発表標題：Summability of divergent solutions for singular first order linear PDEs with holomorphic coefficients
学会等名：Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability
発表年月日：２００８年１月３１日
発表場所：フランス・ＣＩＲＭ

⑥発表者名：日比野　正樹
発表標題：Summability of formal solutions for singular first order linear PDEs with holomorphic coefficients
学会等名：Differential Equations and Exact WKB Analysis
発表年月日：２００７年１０月１２日
発表場所：京都大学数理解析研究所

６．研究組織
(1)研究代表者
日比野　正樹 (HIBINO MASAKI)
岡山理科大学・工学部・准教授
研究者番号：10441461