

平成22年 6月 7日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2009

課題番号：19740079

研究課題名（和文） 形状記憶合金方程式の可解性及び解の性質に関する研究

研究課題名（英文） On solvability and behavior of solutions for shape memory alloy systems

研究代表者 吉川 周二（YOSHIKAWA SHUJI）

独立行政法人国立高等専門学校機構宇宙部工業高等専門学校・経営情報学科・助教

研究者番号：80435461

研究成果の概要（和文）：

形状記憶合金の変位と温度の関係を記述する非線形偏微分方程式についての研究を行った。研究期間内に得られた研究成果は、(1)一次元形状記憶合金方程式(Falk モデル)の定常状態のリアプノフ安定性、(2)温度依存する比熱を持つ多次元形状記憶合金方程式の可解性、(3)多次元形状記憶合金方程式の定常状態のリアプノフ安定性、(4)空間内に配置されたワイヤー状の形状記憶合金の方程式の導出、の4つである。

研究成果の概要（英文）：

Shape memory alloy systems are nonlinear partial differential equations which describe the relation between displacement vector and temperature. Our results for this research subject are as follows:

(1) a dynamical stability of the steady state for the one-dimensional shape memory alloy system called the Falk model, (2) existence and uniqueness of solution to a quasilinear thermoviscoelastic system of shape memory alloys with temperature dependent specific heat, (3) a dynamical stability of the steady state for the multi-dimensional shape memory alloy systems, (4) a derivation of the system describing the dynamics of shape memory alloy wire which is placed in the three-dimensional space.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	360,000	2,360,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：偏微分方程式、形状記憶合金、熱弾性、相転移、調和解析

## 1. 研究開始当初の背景

形状記憶合金は、常温下で変形をさせても、

お湯をかけるなどして温度を高めると元の形にもどるという性質をもった合金である。

この形状記憶の効果は合金の格子構造が変わる相転移現象によることが知られている。この相転移現象に Ginzburg-Landau の相転移理論を応用することで導かれる非線形偏微分方程式が Falk の形状記憶合金方程式と呼ばれる熱弾性方程式である。

熱弾性方程式に対しては様々な研究が知られているが、これまでの結果は変形と温度分布が十分小さな解を求めるといものがほとんどであった。一方、形状記憶合金の応用を考える場合、変形は大きいのが自然である。そのため、これまでの熱弾性方程式の取り扱いとは異なる方法論が必要になる。

非線形偏微分方程式の研究を粗く2つに分けるとすると、「解の存在」と「解の振る舞い」に分けられる。Falk モデルについては、「解の存在」は示されているが「解の振る舞い」は知られていない。多次元の場合「解の存在」も議論されていない状況であった。

近年、内外の研究者の興味はより正確な形状記憶合金の挙動を表現するために、塑性変形を表現する方法の数学的研究などが中心となり、古典的な Falk モデルの研究をするものは少なくなったように思われる。しかし、Falk モデルの解析は諸処の問題と関連し魅力的な題材であると申請者は考え、現在もこのモデルの研究に取り組んでいる。

## 2. 研究の目的

目的は、Falk の形状記憶合金方程式の解の存在と性質についての研究を進展させること、およびその研究と関連する問題や派生する問題の新しい取り扱いを調査・研究し、発展させることである。

## 3. 研究の方法

解の挙動を知るために、有効であろうと考えたのが、大阪大の鈴木貴教授の考案した双対変分原理である。まずは、一次元の形状記憶合金方程式である Falk モデルに対してこの方法を適用することで、解のリアプノフの意味での安定性を求める。

次に多次元形状記憶合金方程式に対して同様の方法が応用出来るかを確認する。ただこの多次元モデルは非線形項が一般化されているため、Falk モデルと全く同じに適用することはできない。そこで、双対変分原理が適用できる非線形項の条件について調査することで、本質的に必要な凸性の不等式が何かを調べる。また、Falk モデルのようにエネルギーをパラメータとする方法を、一般化された多次元準線形の形状記憶合金方程式に応用する場合、エネルギー保存則から導かれる束縛条件が陰関数の形になるため、定常状態の解析が複雑になる。これはエネルギーの代わりに定常温度をパラメータとすることで解決される。

多次元形状記憶合金方程式の可解性だが、粘性付きの問題について、これまでと少し違った視点からの研究を行った。これは、上記の解の挙動の説明の中にある「双対変分原理を適用するのに必要な非線形項が何か」を調査していく上で付随的に見つかった問題である。双対変分原理を Falk モデルの時のように簡潔な形で適用するには、歪みと温度の相互作用の非線形項が温度については線形であることが大事である。しかし既存の結果ではこの相互作用項は温度について線形にとることはできない。そこで比熱が温度依存する形を考えた。この場合、取り得る相互作用項の自由度が上がる。比熱は本来定数であるべきだが、熱力学第三法則(Nernst-Planckの法則)によると、温度ゼロではエントロピーもゼロであるべきである。この要請に従うエネルギーから導かれる比熱は温度依存する。本方程式の温度依存する比熱はこの熱力学第三法則を満たす。そのため本方程式は低温下では妥当な方程式であると言える。証明には、古典的なエネルギー評価に加え、最大正則性、放物型 De Giorgi 法などを用いる。

最後にワイヤーの方程式だが、小磯氏による弾性曲線に対する方法を応用することで導出ができる。

## 4. 研究成果

### (1)平成19年度の研究成果

多次元形状記憶合金方程式の初期値境界値問題の可解性についての研究を行った。既存の結果では、定数比熱の形状記憶合金方程式についての研究がなされていたが、本研究では温度依存する比熱を持つ多次元形状記憶合金方程式について考察した。

定数比熱は一般の温度下では妥当だが、低温の条件下では適切ではない。温度依存する比熱を用いることで、低温部でのエントロピーの振る舞いについて考慮する熱力学第三法則を満たす比熱が実現できる。Miranville-Schimperna(2005)によって、形状記憶合金とは異なるある相転移現象を記述する方程式系について、温度依存する比熱を伴う場合の可解性が示された。このことをヒントにして、我々は温度依存する比熱の形状記憶合金方程式を研究対象にして可解性を調べた。証明は、古典的なエネルギー評価、最大正則性評価(L<sup>p</sup>型)、放物型 DeGiorgi 法などを用いて必要な高階のアプリオリ評価を得ることが出来る。この結果では、既存の定数型比熱の形状記憶合金方程式の非線形項と比べると、温度-歪み相互作用の項により一般的なものをとることが可能になった。特に温度について線形増大する非線形項もとれるようになったため、解の挙動を調べることが出来るのではないかと期待している。

しかし、常温下では定数比熱が妥当である

ため、今後の研究では低温下で温度依存型、常温下では定数となるような比熱をとることが自然であり、この可解性を調べることも今後の研究課題である。本研究はポーランド科学アカデミーの Irena Pawlow 氏と Wojciech M. Zajaczkowski 氏との共同研究で行った(次項目 5 [雑誌論文]、③参照)。

#### (2)平成 20 年度の研究成果

鈴木貴氏(大阪大)との共同研究で、多次元形状記憶合金方程式の定常問題の安定性を示した(次項目 5 [雑誌論文]、①)。空間一次元の問題の場合について、定常問題に対応する変分汎関数が線形化安定な臨界点をもつならば、その近くの時間発展解は時間がたっても臨界点のもとを離れないという、既存の結果(次項目 5 [雑誌論文]、⑤)がある。本研究の目的は、この結果を空間多次元の形状記憶合金方程式に応用することである。しかし多次元形状記憶合金方程式は一次元の方程式とは非線形項の形が異なる。そこで、まずは一般化した多次元熱弾性方程式を考え、どのような非線形項の方程式に対して双対変分原理を利用可能になるのかを調べてみた。その結果、この方法での安定性が得られる方程式に必要な構造がわかった。⑤ではエネルギーの初期値をパラメータとした定常問題を考えていたが、非線形項を一般化した場合、エネルギー保存則は定常状態の温度について陰関数となり取り扱いが複雑になる。そこで、ここではエネルギーの初期値でなく定常状態の温度をパラメータとすることで簡潔な表現が得られ、安定性を示すことができた。ここで得られた結果はこれまで考察してきた Falk-Konopka 型非線形項を持つ形状記憶合金方程式(④参照)だけでなく、昨年度 Pawlow 氏(ポーランド科学アカデミー)と Zajaczkowski 氏(ポーランド科学アカデミー)と共同で研究を行った比熱が温度依存をする形状記憶合金方程式(③参照)に対しても応用が可能である。また、証明には領域の有界性も必要としないため、その他の結果にも利用できることが期待される。

#### (3)平成 21 年度の研究成果

岡部真也氏(岩手大学・人文社会科学部)と鈴木貴氏(大阪大学・大学院基礎工学研究科)との共同研究で、形状記憶合金ワイヤーの運動について考察した。三次元空間の中に配置された形状記憶合金ワイヤーの熱弾性変形を記述する偏微分方程式を導出したことが研究成果である(次項目 5 [雑誌論文]、②参照)。これまで主に研究が行われてきた問題は有界領域内のものであり合金の塊を対象としているが、境界条件は固定されたものであったため、解で内部変形はわかるが外から見た変形はない。一方で本方程式の解は実際に合金の形状を表しており、安定形状の決定問題などが解決すれば応用上も有効である

う。

方程式は以下のようにして導出される。ワイヤーが描く曲線は閉曲線であるとし、伸び縮みはしないと仮定する。ワイヤー状の材料を考えるため、空間変数として弧長パラメータを用いる。これらの条件のもとで導かれる歪みは初期形状にも依存する。この歪みを用いて Falk 型の非線形項で形状記憶合金の相転移を表現することで、ワイヤーの形状記憶合金方程式が導かれる。これは分散型-放物型連立偏微分方程式となり、閉曲線の条件より周期境界問題となる。古典的な形状記憶合金方程式である Falk モデルと比較すると、伸び縮みなしの束縛条件のせいで半線形ではあるが三階の非線形項が弾性プレート方程式に現れる点特徴である。この三階の非線形項は、弾性プレート方程式をシュレディンガー方程式に分解すると、微分シュレディンガー方程式の非線形項と同等なものとなることがわかる。そのため、今後の課題である本方程式の解析は Falk モデルに比べると難しくなることが予想される。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 6 件)

① TAKASHI SUZUKI and SHUJI YOSHIKAWA, STABILITY OF THE STEADY STATE FOR MULTI-DIMENSIONAL THERMOELASTIC SYSTEMS OF SHAPE MEMORY ALLOYS, Discrete and Continuous Dynamical System, Ser. S, 査読有, (to appear).

② 岡部 真也, 鈴木 貴, 吉川 周二, 形状記憶合金ワイヤーの運動を記述する熱弾性方程式の導出, 数理解析研究所講究録, 査読無, (to appear).

③ Shuji Yoshikawa, Irena Pawlow and Wojciech M. Zajaczkowski, A QUASILINEAR THERMOVISCOELASTIC SYSTEM FOR SHAPE MEMORY ALLOYS WITH TEMPERATURE DEPENDENT SPECIFIC HEAT, Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有, Vol. 8(2009), p. 1093-1115.

④ Shuji Yoshikawa, Irena Pawlow and Wojciech M. Zajaczkowski, QUASILINEAR THERMOELASTICITY SYSTEM IN SHAPE MEMORY MATERIALS, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, Vol. 37(2007), p. 1733-1759.

⑤ Takashi Suzuki and Shuji Yoshikawa, Stability of the steady state for the Falk model system of shape memory alloys,

Mathematical Methods in the Applied Sciences, 査読有, Vol.30(2007), p.2233-2245.

⑥ Shuji Yoshikawa,  
Global Solutions for Shape Memory Alloy Systems, Tohoku Mathematical Publications, 査読有, Vol.32(2007), p.1-105.

[学会発表] (計 1 1 件)

(1) Shuji Yoshikawa,  
On a quasilinear shape memory alloy system with temperature dependent specific heat, Seminar Partial Differential Equations, Universität Konstanz, 2010年1月11日.

(2) Shuji Yoshikawa,  
Remarks on the shape memory alloy system without viscosity in multi space dimensions, 京都大学数理解析研究所 共同利用研究集会「非線形発展方程式と現象の数理」, 京都大学, 2009年10月20日.

(3) 吉川 周二,  
温度依存する比熱を持つ形状記憶合金方程式の可解性と定常状態の力学的安定性について, NLPDE Seminar, 京都大学, 2009年2月6日.

(4) 吉川 周二,  
多次元形状記憶合金方程式の定常状態の安定性について, YU Nonlinear Seminar, 山口大学, 2008年11月25日.

(5) Shuji Yoshikawa,  
Stability of the steady state for multi-dimensional thermoelastic systems of shape memory alloys, PDE approximations in Fast reaction - Slow diffusion scenarios, Lorentz Center, Leiden University, Leiden, 2008年11月12日.

(6) 吉川 周二,  
Stability of the steady state for multi-dimensional thermoelastic systems of shape memory alloys, 解析セミナー, 愛媛大学, 2008年10月24日.

(7) 吉川 周二,  
Quasilinear thermoviscoelastic system of shape memory alloys, Thermo-Visco-Elastic Eqns に関する講演会, 早稲田大学, 2008年6月18日.

(8) 吉川周二,  
Quasilinear thermoelastic system of shape

memory alloys with temperature dependent specific heat, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学, 2008年2月5日.

(9) Shuji Yoshikawa,  
Quasilinear thermoelastic system of shape memory alloys with temperature dependent heat conductivity, International Conference on Free Boundary Problems in Chiba 2007, Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation:---Mathematical Analysis, Modelling and Simulation---, 2007年11月29日.

(10) 吉川 周二,  
温度依存する比熱を持つ形状記憶合金方程式について, 平均場理論に関する集中セミナーIV, ホテルグランディア あおしま太陽閣, 2007年11月18日.

(11) 吉川 周二,  
ヒステレシスを持つある梁の方程式の弱解の時間大域的存在と一意性について, 熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学, 2007年5月12日.

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.ube-k.ac.jp/~shoe/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉川 周二 (YOSHIKAWA SHUJI)  
独立行政法人国立高等専門学校機構宇部  
工業高等専門学校・経営情報学科・助教  
研究者番号: 80435461