

平成 22 年 5 月 7 日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19740081

研究課題名 (和文) 臨界ソボレフ-ハーディ指数をもつ放物型方程式の無限時間爆発解の挙動に関する研究

研究課題名 (英文) Reserch of the asymptotic baheviour of infinite-time blow up solutions for parabolic equations associated with ciritcal Sobole-Hardy exponent

研究代表者 石渡 通徳 (Michinori Ishiwata)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：30350458

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論

1. 研究計画の概要

本研究では臨界ソボレフ-ハーディ指数をもつ放物型方程式の時間大域解、とくに無限時間爆発解の漸近挙動を明らかにすることを目的とする。そのため、

- (1) 臨界型放物型方程式の解の可解性に関する抽象理論の展開
- (2) 時間発展しない定常問題でのコンパクト性の破れの解析
- (3) ソボレフ-ハーディ型不等式のもつ数理的構造

の三つのトピックについて、周辺の研究も含め明らかにする必要がある。

2. 研究の進捗状況

臨界型方程式には既存の解析方法が通用しないため、3年目までは周辺の・基礎的事項の研究を行った。上記(1)に関しては4年目にかけて研究が進展中である。(2),(3)については、臨界放物型方程式の定常解の構造に関する知見を得る目的で行なった Trudinger-Moser 型不等式の最大化関数の存在に関する研究、非自明な状況下での放物型方程式の解の漸近挙動に関する知見を得る目的で行なった、外部領域で定義された劣臨界指数をもつ藤田型方程式の解の漸近挙動に関する研究、ハーディ形不等式に関する知見を得る目的で行なった、トレースソボレフ-ハーディ型不等式の最大化関数の存在と非存在に関する研究について、それぞれ著しい結果を得た。Trudinger-Moser 型不等式の最大化関数の存在に関する研究では、有界領域の場合には常に最大化関数が存在することが知られていたが、本研究では、非有界領域上の問題では、パラメータが臨界指数に近いときには最大化

関数が存在し、小さいときには最大化関数が存在しないという、既存の結果からはには信じがたい結果を得た。外部領域で定義された藤田型方程式の解の漸近挙動については、領域の境界が非自明であることが既存の解析の応用を妨げていたが、東北大学石毛准教授の開発した手法により、時間発展を解析する基礎的道具立てがそろったことを受け、無限次元力学系の理論を精密に適用することにより、境界項から来る降下の詳細な分析を行なうことができた。トレースソボレフ-ハーディ不等式に関する研究では、全領域の場合と異なり、トレースハーディ不等式は特異最小化元すら持ち得ないこと、またトレースソボレフ-ハーディ不等式については凝集コンパクト性原理を用いることにより最大化元の存在を得ることができた。対応する放物型方程式の解の漸近挙動は、本研究の研究テーマに密接に関係するものであるが、今後の課題である。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

本研究は、既存の解析方法のほとんどが通用しなくなる臨界型問題を扱うものであるため、研究計画策定時には、実際の研究の進行がどのようなものになるか必ずしも明らかではなかった。この点を受け、さまざまな困難が生じた。一例は、係数関数が特異であることにより通常のソボレフ空間を用いた強解の構成が破たんすることである。これを解説するには、対応するソボレフ-ハーディ不等式の実解析的な理解が必要と思われるが、このテーマは今後の課題として残されている。一方で、解の漸近挙動に表れる臨界性を理解する目的

で行った、非有界領域上での Trudinger-Moser 型不等式の最大化関数の存在に関する研究では、反関数の増大度を指定するパラメータが臨界指数を含んである程度大きいときに限り最大化関数が存在することを示した。このパラメータに関する制限は、有界領域の対応する結果を考えるとテクニカルに思えたが、実はパラメータが十分小さいときには最大化関数が存在しないことが分かった。これは本研究のテーマからみれば派生事項であるが、従来は想像されていなかった結果である。このように、本研究の本来のテーマである放物型方程式の解析は困難を極めているが、問題の解析の過程で有益な派生結果を多く得ることができている。

4. 今後の研究の推進方策

本研究には残り一年の時間が残されているが、以下の推進方策をとる。

- (1) 特異係数を持つ放物型方程式の強解を構成するための抽象的な関数解析的枠組みがどうなるかを探求する。
- (2) 上記の探求には臨界性の引き起こす数学的現象がどのようなものであるかについての深い理解が欠かせない。その意味で、臨界性を持つ他の問題を考察することも重要である。特に Trudinger-Moser 型不等式の最大化関数の存在に関する変分問題の理解は、放物型方程式の時間大域解の挙動を考察する点からも重要であると思われるのでこれを推進する。
- (3) ハーディ-ソボレフ不等式にかかわる困難は、これまでの研究により臨界性と同時に係数関数のもつ特異性にもよることが明らかになった。これはハーディの不等式に由来する特異性であるので、ハーディの不等式の背景にある変分的構造の探求を行うことにより、特異性からくる困難の特徴をつかむ。

以上の方策により、当初の研究計画が直面している困難を打開する。

5. 代表的な研究成果

〔雑誌論文〕(計 6 件)

- (1) The decay of the solutions for the heat equation with a potential, Kazuhiro Ishige, Michinori Ishiwata, Tatsuki Kawakami, Indiana University Mathematics Journal, 58, No.6, (2009), 2673-2708.
- (2) Effect of topology on the multiplicity of solutions for some semilinear elliptic systems with critical Sobolev exponent, Ishiwata Michinori, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 16 (2009), 283-296.
- (3) Existence of multiple solutions for a nonlinearly perturbed elliptic parabolic

system in R^2 , Michinori Ishiwata, Takayoshi Ogawa, Futoshi Takahashi, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2009(2009), No. 32, 1-10.

- (4) Asymptotic behavior of strong solutions for nonlinear parabolic equations with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, Advances in Differential Equations, 13 (3-4), 2008, 349-366.
- (5) Multiple solutions for semilinear elliptic systems involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, Differential and Integral Equations, 20 (11), 2007, 1237-1252.

〔学会発表〕(計 36 件)

- (1) Michinori Ishiwata, The asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equation with critical Sobolev exponent, 4th Polish - Japanese Days Current advances in applied nonlinear analysis and mathematical modelling issues, Warsaw/Madralin, Poland. 5.20 講演.
- (2) Michinori Ishiwata, Existence of maximizing functions for functionals of critical growth, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 15-19, July, 2009, Tohoku University, Sendai, Japan. 6.17 講演.
- (3) Michinori Ishiwata, On the threshold solutions for semilinear parabolic problems involving critical Sobolev exponent, Third Euro-Japanese workshop on blow-up, 2008, Tohoku University, Sendai, Japan. 9.8 講演.
- (4) Michinori Ishiwata, On the concentration phenomena of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, Ishiwata Michinori, Ryukoku Workshop 2008, Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences, Ryukoku university, Kyoto, Japan. 6.13 講演.
- (5) Michinori Ishiwata, Asymptotic behavior of time-global solutions for a semilinear parabolic equation involving critical Sobolev exponent, First Chile-Japan workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDE, Centro de modelamiento matematico, departamento de ingenieria matematica, universidad de Chile, Santiago, Chile. 10.23 講演.

〔図書〕(計 1 件)

石渡 通徳, 日本評論社、「これからの非線型偏微分方程式」, 2007, 203-221.