

機関番号：11601
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2007～2010
 課題番号：19740081
 研究課題名（和文）臨界ソボレフ-ハーディ指数をもつ放物型方程式の無限時間爆発解の挙動に関する研究
 研究課題名（英文）A study on the asymptotic behavior of infinite-time blow up solutions for parabolic equations involving critical Hardy-Sobolev exponent
 研究代表者
 石渡 通徳（ISHIWATA MICHINORI）
 福島大学・共生システム理工学類・准教授
 研究者番号：30350458

研究成果の概要（和文）：本研究では臨界ソボレフ・ハーディ指数をもつ半線型放物型方程式に見られる無限時間爆発解の漸近挙動のプロファイル解析した。臨界ソボレフ・ハーディ指数の特別な場合である臨界ソボレフ指数をもつ場合には、方程式を不変にするスケールリングを行い正規化することにより、無限時間爆発解は空間全域における非自明定常解を漸近プロファイルとして持つことがわかった。関連する放物型方程式の解析も行なった。

研究成果の概要（英文）：In this study, we are concerned with the profiles of infinite time blow-up solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev-Hardy exponents. For the critical Sobolev case, which is a special case of the critical Sobolev-Hardy case, we find that the asymptotic behavior of infinite time blow-up solutions are governed by the nontrivial stationary solutions of the equations. We also treat the several parabolic equations which are related with Hardy and Sobolev inequalities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,200,000	660,000	3,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：臨界指数、漸近挙動、コンパクト性の破れ、無限時間爆発

1. 研究開始当初の背景

半線型放物型方程式は、多くの社会現象・自然現象の数理モデルとして典型的に現れるため、方程式に内蔵される数理の探求、特に解の時間発展に伴う漸近挙動の解析は理論面のみならず応用的側面からも重要である。特に系の安全な制御の観点からは、「爆発」などの特異な現象について、その数理的メカニズムを探ることは重要であるが、これまでの爆発現象の研究は個々の方程式に応じた解析がなされてきているだけで、数学的概念の観点からどのように爆発現象が分類され

るのか、またその概念を用いて爆発現象の詳細がどのように解析されるのかは余りわかっていなかった。特に、臨界指数をもつ放物型方程式にしばしば見られる無限時間爆発解と、典型的に見られる有限時間爆発解の相違についてはほとんどわかっていなかった。

2. 研究の目的

本研究は爆発現象を「解軌道のコンパクト性の破れ」の観点から解析し、爆発現象の背後にどのような数理構造のカテゴリがあるかを明らかにしようとするものである。具体的

には、臨界指数を持つ放物型方程式にしばしば見られる無限時間爆発解について、コンパクト性の破れの観点からその漸近プロファイルを明らかにするものである。またこれは対応する定常問題、すなわち半線型楕円型方程式の解構造とも密接に関連するため、付随してこの解析も行なった。

3. 研究の方法

研究の方法、特に研究に対する視点は以下の二点である。

(1) 必ずしもコンパクトではない軌道をもつ力学系の理論。方程式には自然なエネルギー構造が入り、無限時間爆発解はこのエネルギーを有限に保つことがわかるので、無限時間爆発解はコンパクトでない力学系として捉えることができる。

(2) 共形不変性をもつ楕円型方程式に付随する熱流の構造。方程式自体は自然な共形構造をもち、付随してコンパクト性の破れが起こる。

本研究は上記(1)(2)の視点を融合し、これまで個別的なテクニックにより解析されてきた放物型方程式の爆発解の挙動を扱った。

4. 研究成果

無限時間爆発解はコンパクトでない軌道を持ち収束先が存在しないため、漸近挙動の解析といっても通常のテクニックは役に立たない。本研究では共形構造に基づくスケールリングとエネルギー構造の不変性、及び放物型方程式の正則性に関する事項をフルに使用し、ソボレフ臨界の場合に、球対称かつ正值な無限時間爆発解は非自明な全域正值定常解を漸近プロファイルとしてもつことが示された。付随する線型放物型方程式の減衰性質、Keller-Segel モデルにおける非自明な解の分岐、楕円型方程式の解の多重性、臨界型関数不等式に対する最大化元の存在についても結果を得ている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

① Existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in \mathbb{R}^N , Michinori Ishiwata, 査読有, Math. Ann., to appear.

② On the asymptotic behavior of unbounded radial solutions for semilinear parabolic problems involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 査読有, J. Differential Equations 249 No.6, (2010), 1466-1482.

③ Semilinear parabolic equation in \mathbb{R}^N

associated with critical Sobolev exponent, Ryo Ikehata, Michinori Ishiwata and Takashi Suzuki, 査読有, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non lineaire, 27 no.3, (2010), 877-900.

④ The decay of the solutions for the heat equation with a potential,

Kazuhiro Ishige, Michinori Ishiwata and Tatsuki Kawakami, 査読有, Indiana University Mathematics Journal, 58 No.6, (2009), 2673-2708.

⑤ Effect of topology on the multiplicity of solutions for some semilinear elliptic systems with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 査読有, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 16 (2009), 283-296.

⑥ Existence of multiple solutions for a nonlinearly perturbed elliptic parabolic system in \mathbb{R}^2 , Michinori Ishiwata, Takayoshi Ogawa and Futoshi Takahashi, 査読有, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2009 (2009), No. 32, 1-10.

⑦ Asymptotic behavior of strong solutions for nonlinear parabolic equations with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 査読有, Advances in Differential Equations, 13 (3-4), (2008), 349-366.

⑧ Multiple solutions for semilinear elliptic systems involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 査読有, Differential and Integral Equations, 20 (11), 2007, 1237-1252.

⑨ On bounds for global solutions of semilinear parabolic equations with critical and subcritical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 査読有, Differential and Integral Equations, 20 (9), 2007, 1021-1034.

[学会発表] (計 30 件)

① L^p - L^q type estimates for Laplace equations with dynamical boundary conditions, 石渡 通徳, 第 18 回「応用解析」研究会, 南風荘, 箱根, 2010.3.1.

② On the dynamical systems with noncompact orbit, RIMS 共同研, Research on the elliptic and the parabolic equations involving the energy functional with lack of compactness, 石渡 通徳, 京都大学数理

解析研究所, 京都, 2010. 2. 17.

③ Asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent: a variational point of view, 「非線形問題に現れる特異性の解析 (SNP2010)」, Michinori Ishiwata, 29, November, 2010, Kansai seminar house, Kyoto, Japan.

④ Trace type Hardy inequalities in the half space and related topics, Michinori Ishiwata, 2, November 2010, University of Naples, Italy.

⑤ On the asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent II, 「広島微分方程式研究会」, 石渡 通徳, 広島大学, 西条, 2010. 10. 8.

⑥ Asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 10 September 2010, Lorentz center, Leiden, Netherland.

⑦ On the variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, The 8th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, 25 May, 2010, Dresden university of technology, Dresden, German.

⑧ On the maximizing problem associated with Trudinger-Moser type inequalities in \mathbb{R}^2 , 石渡 通徳, 「松山解析セミナー 2010」, 愛媛大学, 松山, 2010. 2. 5.

⑨ On the existence and nonexistence of maximizers for variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in unbounded domains, 石渡 通徳, 「微分方程式深江ワークショップ」, 神戸大学, 神戸, 2010. 1. 22.

⑩ Asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 6, November 2009, University of Florence, Italy.

⑪ Asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving

critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 3, November 2009, University of Naples, Italy.

⑫ Existence of maximizing functions for functionals of critical growth, Michinori Ishiwata, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 15-19, July, 2009, Tohoku University, Sendai, Japan.

⑬ Existence of maximizers for functionals of critical growth, 石渡 通徳, 「変分問題とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2009. 6. 10.

⑭ The asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equation with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 4th Polish - Japanese Days Current advances in applied nonlinear analysis and mathematical modelling issues 20 May 2009, Warsaw/Madrain, Poland.

⑮ 臨界ソボレフ指数をもつ半線型熱方程式: 変分法的立場から, 石渡通徳, 「2009 年度日本数学会・春季総合分科会・函数方程式分科会特別講演」, 東京大学, 2009. 3. 26.

⑯ Existence of an extremal function for Trudinger-Moser type inequalities in the whole domain, 石渡 通徳, 「第 16 回応用解析研究会シンポジウム」, 熱海, 2009. 3. 3.

⑰ Variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in \mathbb{R}^N , 石渡 通徳, 「確率論と PDE」, 広島大学, 広島, 2009. 1. 20.

⑱ Potential well type results for critical semilinear parabolic equations with gradient term, 石渡通徳, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008. 9. 26.

⑲ Existence of a maximizer for Trudinger-Moser type inequalities in \mathbb{B}^N , \mathbb{R}^2 , 石渡 通徳, 「第四回 非線型の諸問題」, 佐賀大学, 佐賀, 2008. 9. 22.

⑳ On the threshold solutions for semilinear parabolic problems involving critical Sobolev exponent, Ishiwata Michinori, Third Euro-Japanese workshop on blow-up, 8, September, 2008, Tohoku University, Sendai, Japan.

㉑ Asymptotic behavior of time global solutions for semilinear parabolic equation with critical Sobolev exponent, 石渡 通徳, 「第2回岐阜非線形ワークショップ - 非線形現象の数理解析 -」, 岐阜大学, 岐阜, 2008.7.31.

㉒ On the concentration phenomena of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, Ishiwata Michinori, Ryukoku Workshop 2008, Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences, 13, June, 2008, Ryukoku university, Kyoto, Japan.

㉓ A remark on the asymptotic behavior of solutions for critical parabolic problems II, 石渡通徳, 日本数学会春季総合分科会, 近畿大学, 2008.3.25.

㉔ 変分解析入門, 石渡 通徳, サーベイレクチャーシリーズ「非線形問題の数学解析」, 東北大学, 仙台, 2008.2.14-16.

㉕ Formation of singularities in time-global solutions for critical semilinear parabolic equations in \mathbb{R}^N , 石渡 通徳, 「第5回浜松偏微分方程式研究集会」, 静岡大学, 2007.12.17.

㉖ Bubbling phenomena for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, 石渡 通徳, 「非線形解析学的手法による数理物理学の研究 II」, 東北大学, 2007.12.12.

㉗ Asymptotic behavior of time-global solutions for a semilinear parabolic equation involving critical Sobolev exponent, Ishiwata Michinori, First Chile-Japan workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDE, 23, October, 2007, Centro de modelamiento matematico, departamento de ingenieria matematica, universidad de Chile, Santiago, Chile.

㉘ Multiple existence of positive solutions for semilinear elliptic systems with critical Sobolev exponent, 石渡通徳, 日本数学会秋季総合分科会, 東北大学, 2007.9.21.

㉙ On the asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations with critical Sobolev exponent, 石渡 通徳, 研

究集会「広島微分方程式研究会」, 広島, 2007.10.13.

㉚ A remark on the asymptotic behavior of solutions for critical parabolic problems, 石渡通徳, 日本数学会秋季総合分科会, 東北大学, 2007.9.24.

〔図書〕(計1件)

① 石渡 通徳, 「これからの非線型偏微分方程式」第10章「スケール変換不変なエネルギー汎関数をもつ非線型放物型方程式の解の漸近挙動」, 共著, 日本評論社(2007), 203-221.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 通徳 (ISHIWATA MICHINORI)

福島大学・共生システム理工学類・准教授

研究者番号: 30350458