

機関番号：34315

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007 ～ 2010

課題番号：19740090

研究課題名（和文） 双対作用による量子群およびフォンノイマン環の研究

研究課題名（英文） A study on quantum groups and von Neumann algebras concerning dual actions

研究代表者

青井 久 (AOI HISASHI)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：90396276

研究成果の概要（和文）:

フォンノイマン環の量子群の作用を双対作用による解析を行った。その結果、真無限型フォンノイマン環上の群 K の余作用について、その像が K の閉部分群 H に含まれるものとコサイクル同値になることが、双対作用が群 H の誘導作用によって表されていることと同値であることが判明した。また、測度空間上の部分同値関係に関する通約性を用いることにより、群から決まるヘッケ環の概念を測度空間の同値関係から決まるフォンノイマン環へと拡張することに成功した。

研究成果の概要（英文）:

We investigated actions on von Neumann algebra by their dual actions. In this study, we proved that, for any coaction of a locally compact group K on a properly infinite von Neumann algebra and a closed subgroup H of K , the action is cocycle conjugate to a coaction which comes from a coaction of H if and only if the dual action is induced by an action of H . By using the notion of commensurability of ergodic measured equivalence subrelations, we also generalized the notion of Hecke algebras to von Neumann algebras which come from measured equivalence relations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	600,000	0	600,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,100,000	450,000	2,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：1 コサイクル、エルゴード理論、余作用、作用素環論、双対作用、同値関係、誘導作用、関数解析

1. 研究開始当初の背景

Murray-von Neumann によって研究が始められたフォンノイマン環は、代数的性質と位相的性質の両方から特徴づけられる興味深い作用素環として、現在に至るまで解析が続けられている。フォンノイマン環は、様々な側面から研究が行われており、その中で大き

な役割を果たしているのは群作用を用いた解析である。

実際、実数群や整数群による群作用を用いることにより、III 型フォンノイマン環はそれらの接合積で表すことができることは、フォンノイマン環の構造定理として知られており、フォンノイマン環の分類理論に大きく寄

与する重要な結果である。

また、フォンノイマン環上のコンパクト群の作用が極小という条件をもつならば、不動点環を含む部分環と部分群の間に1対1の対応が存在する、いわゆる「ガロア対応」の存在は、フォンノイマン環の作用の解析に大きな影響を与えることとなった。

一方、群作用の概念は拡張され、より広い対象を扱うことが可能となった。実際、群作用の双対の概念から定義される群の余作用、これらを全て包括する概念によって定義できる量子群の作用が与えられた。これにより、既存の理論の一般化や作用の分類など、様々な立場から研究が行われることとなった。しかしながら、コンパクトとは限らない一般の作用の結果については、ガロア対応の問題を始め、未解決問題が数多く存在しているのが現状であった。

そのような中、代表者の研究によってカルタン部分環に関わる作用の解析が行なわれた。その結果、それまで群作用で知られていた理論を一部の余作用へと拡張することに成功した。

実際、カルタン部分環を固定するような群の余作用が測度空間上の可算同値関係上の1コサイクルによって特徴づけられることが明らかになり、更に、その余作用に関する双対作用が1コサイクルの値域を特徴づけることが判明した。

2. 研究の目的

以上の背景のもと、代表者は一般の量子群の作用から自然に定義される双対作用に着目することとなった。これは、接合積上で定義される作用であり、双対作用による2回接合積上の作用が元のフォンノイマン環の作用とコサイクル同値になるという著しい性質を持っている。

代表者は、双対作用の研究によって、元の作用および作用しているフォンノイマン環の様々な性質が特徴づけられると予想し、一般の(可換とは限らない)作用に対して既存の結果を拡張した理論を新たに展開することが可能になると考えた。

そこで、以下を目標として研究を進めた。

(1) 群の余作用をその双対作用の観点から解析する。

具体的には、群の余作用の性質を双対作用の誘導作用という観点から特徴づけることである。このような取り組みは、可換群の作用や、同値関係上の1コサイクルから決まる余作用といった限られた条件の下では成功していた。本研究が目標とすることは、余作用を量子群的な側面から捉えて解析を行うことで、そういった特別な前提を必要としない余作用の一般論を構築することである。

(2) 前項の結果をより広い対象である、フ

オンノイマン環上の量子群の作用に対して適用する。

そのために、まだ群作用でのみ用いられている誘導作用の概念を、一般の量子群の作用へと拡張することを目標とする。

(3) 以上の事実を測度空間の理論等に対応させることによって、エルゴード理論の新たな解析手法を構築する。

そこで中心となるのは、1コサイクルのコサイクル同値性の特徴づけを、対応する余作用およびその双対作用の観点から行うことである。

特に、群の正規性の一般化である群の通約性という概念は、代表者によって測度空間の可算同値関係に対して一般化されている。この理論に対して、余作用の解析で得た結果を適用することで、同値関係の通約性の新たな解析を展開させることができるようになると期待できる。

3. 研究の方法

研究を進める上で中心なるものは、接合積上で定義される双対作用である。接合積の双対性という性質を用いることで、双対作用の情報から元の作用を特徴づけることができる見込みがある。

最初に取り組んだことは、群の余作用とその双対作用の関係を完全に解明することである。この結果は可換群の場合や測度空間上の可算同値関係から来る余作用など、限られた状況では成り立つことが知られていたため、それらの議論を非可換群の余作用に応用するという手法を取った。

次に、余作用の解析で得られた結果をもとに、研究対象を一般の量子群の作用に移して研究を進めることとなった。具体的には、一般の量子群の作用についても誘導作用の概念を構築し、それを元に双対作用の解析を行うという手法をとって解析を行った。

研究のどの段階においても、測度空間の理論との対比を常に行いながら解析を進めた。実際、可算同値関係上の1コサイクルとカルタン部分環を固定する余作用との間の1対1の対応は知られており、そこで得られた結果を非可算同値関係へと拡張して対比をさせることや、同値関係と部分同値関係の組から決まる通約性という性質に対して、1コサイクルを通じて余作用の視点を用いた研究を行った。

本研究は主に作用素環論とエルゴード理論を始めとする測度空間の理論を用いたものであるが、手本とするべき群作用の理論は代数学を由来とするものである。また、測度空間における同値関係の理論は幾何学とも深く関連した分野である。ゆえに、得られた研究成果は他の様々な分野とも関連する見込みがある。そこで、作用素環論以外の専門家

による研究集会にも積極的に参加し、議論を行った。

4. 研究成果

まず、最初の目標であった、群の余作用に関する双対作用と誘導作用の対応については完全な対応を確立することに成功した。

具体的には、真無限型フォンノイマン環上の群 K の余作用について、その像が K の閉部分群 H に含まれるものとコサイクル同値になることが、双対作用が群 H の誘導作用によって表されていることと同値であることが判明した。

これは、今まで部分的に知られていた結果を全ての余作用に拡張したものであり、当初の期待通りの結果である。それに伴い、可算同値関係上の1コサイクルで知られていたコサイクル同値性の結果を、一般の(非可算)同値関係に対して拡張することに成功した。以上の結果を取りまとめて投稿し、雑誌論文に掲載された。

しかしながら、最終的な目標であった一般の量子群の作用については、解明することができなかった。実際、誘導作用の概念を拡張には成功したものの、その情報を元の作用と対応付けるまでには至らなかった。研究を進めることにより、これまで議論の中核には出てこなかった群の性質が理論に大きく寄与していることが判明した。今後はその性質の抽象化という観点から研究を続ける意向である。

また、1コサイクルから決まる余作用の解析を東京学芸大学の山ノ内氏と進めることにより、群におけるヘッケ環の概念を同値関係から決まるフォンノイマン環へと拡張することに成功した。具体的には、同値関係の組から決まるフォンノイマン環に対して、それらから決まる相対可換子環がヘッケ環の構造を一般化したものになっていることが判明した。同値関係が群の接合積から決まる場合には群における通常のヘッケ環が構成できることから、この研究成果は群から決まるヘッケ環の概念を同値関係へと一般化したものと言える。

以上の結果を取りまとめて投稿し、雑誌論文に掲載された。

こうして得られたヘッケフォンノイマン環は、その構造だけでなく、群で知られているヘッケ作用素との関連も期待できる興味深い研究対象である。特に、整数論に関連した既存の群作用の理論を同値関係の立場から解析することで、保型形式等との新たな関連を見出すことができる見込みがある。このような視点に立った研究は作用素環論の新たな側面を解明する取り組みと行うことができる。今後の大きな目標として研究を続けたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

著者名: H. Aoi, T. Yamanouchi、論文表題: Hecke von Neumann algebra of ergodic discrete measured equivalence relations、雑誌名: Publ. RIMS Kyoto Univ.、査読: 有、巻: 46、発行年: 2010、ページ: 607-667

著者名: H. Aoi、論文表題: A characterization of a coaction reduced to that of a closed subgroup、雑誌名: Tokyo Journal of Mathematics、査読: 有、巻: 30、発行年: 2008、ページ: 311-324

[学会発表](計6件)

発表者名: H. Aoi、発表表題: 測度空間上の同値関係における正規性と通約性について、学会名等: 表現論、組み合わせ論とその周辺、発表年月日: 2010年12月1日、発表場所: 琉球大学(沖縄県)

発表者名: H. Aoi, Y. Yamanouchi、発表表題: エルゴード同値関係の包含関係から作られるヘッケ・フォンノイマン環について、学会名等: RIMS共同研究「作用素環論の最近の進展について」、発表年月日: 2010年9月1日、発表場所: 京都大学数理解析研究所(京都府)

発表者名: H. Aoi、発表表題: A characterization of a coaction associated with the induced action、学会名等: The 12th KOTAC International Conference 2010、発表年月日: 2010年6月17日、発表場所: インチョン大学(韓国)

発表者名: H. Aoi、発表表題: Coactions on von Neumann algebras、学会名等: 立命館大学解析セミナー、発表年月日: 2009年5月12日、発表場所: 立命館大学(滋賀県)

発表者名: H. Aoi、発表表題: 余作用の縮小可能性について、学会名等: 北海道大学月曜解析セミナー、発表年月日: 2008年7月28日、発表場所: 北海道大学(北海道)

発表者名: H. Aoi、発表表題: 測度空間上の同値関係とフォン・ノイマン環について 正規性と通約性、学会名等: RIMS共同研究「作用素環論の新展開」、発表年月日: 2007年9月11日、発表場所: 京都大学数理解析研究所(京都府)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青井 久 (AOI HISASHI)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：90396276