様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月　１５日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2007～2008
課題番号：19740091
研究課題名（和文）　微分方程式に現れる発散解のボレル総和可能性とボレル和の構造の研究

研究課題名（英文）　Borel summability of divergent solutions of differential equations and the structure of its Borel sum

研究代表者
市延　邦夫（ICHINOBE KUNIO）
神奈川工科大学・基礎･教養教育センター・准教授
研究者番号：20434417

研究成果の概要：1.非コワレフ型偏微分方程式の初期値問題に対する発散解のボレル総和可能性について、特殊な作用素の場合、非斉次方程式に帰着し、未知の発散解を既知の発散解を用いて与えることが出来る。これにより、未知発散解の性質は既知発散解の性質と同様であることが判る。後は方程式の拡張が残された問題である。2.不確定特異点を持つ常微分方程式系の解に対する指数増大評価の指数によって不確定度を定義し、この不確定度を係数行列の零点の平均の位数を用いることにより特徴付けた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	600,000	0	600,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	150,000	1,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学･大域解析学
キーワード：偏微分方程式、発散級数、ボレル総和法、初期値問題、常微分方程式系、不確定度

１．研究開始当初の背景

(1)ボレル総和法：歴史的には、常、偏微分方程式の解をべき級数で求める方法はよく知られています。そうして求めたものが収束すれば問題はないのですが、必ずしもそうとは限りません。そのような発散級数解が現れるのはどのような方程式の場合かの判定は大体分かっていますが、問題は、発散級数解にどの様な意味があるのかを知ることです。常微分方程式の不確定特異点の周りの発散級数解に対して、この問題は古くから研究が進められていて、発散級数解は真の解の漸近展開と考えられることが分かっています。ところが、１つの発散級数解を漸近展開に持つ真の解は一般には無限個ありますので、どの様な真の解を捉えているのか不明です。ところが、３０年ほど前にそのような発散級数の総和法が研究されました。それが、ボレル総和法と呼ばれるもので、その場合に現れる解はただ１つに決まり、その一意な解をボレル和と呼びます。
このボレル総和法を通じての解析は、特にそ

の理論を整備したフランスで盛んに研究されています。しかし、常微分方程式の解の存在定理のようなもの、ここでは、発散級数解がボレル総和可能なための十分条件については研究がなされていますが、その逆である必要性(この問題は難しすぎるということもあります)、また、特に十分条件下での解の具体的な表示についての結果はほとんど得られてはおりません。
そこで、単純な例である発散する一般超幾何級数に対する総和法を研究しました。発散する一般超幾何級数は不確定特異点を持つある線形常微分方程式の形式解であります。この発散級数に対して、ボレル総和法を用いることにより、ボレル和を具体的に構成しました。このことはボレル総和法の観点において、発散する一般超幾何級数からボレル和を実際に構成した初めての試みでありました。

(2)偏微分方程式への応用：不確定特異点をもつ常微分方程式において発展してきたボレル総和法を偏微分方程式へ応用する。
①常微分方程式論において、解析的常微分方程式の発散解は何の条件も無しにいつもマルチ総和可能であることが証明されている。
②しかし、偏微分方程式においては無条件では総和可能性が成り立たないことが 10 年前に証明された。具体的には、複素熱方程式の初期値問題の発散解のボレル総和可能性は、初期値に対する大域的な指数増大条件が必要かつ、十分であった。
③そこで、この熱方程式を一般化した線形定数係数非コワレフスキ型方程式の初期値問題の発散解についての研究が始まりました。現在までには特殊な擬同次型の方程式にまで拡張されていますが、一般の定数係数線形方程式に対する問題は解決されてはいません。
この偏微分方程式への応用は近年、徐々に増えてきているが、まだ多くはありません。

(3)ボレル和と古典解との関係：いろいろな現象等を複素領域で考えることにより実際の現象の数学的意味や問題の本質が分かることはよくあることです。
①熱方程式の初期値問題の発散解に対するボレル和は初期値に対する大域的な指数増大条件の下、熱核を用いて与えられることが示されている。このことは、解の積分表示がフーリエ積分の理論によって得られる古典解と一致することを示している。
②そこで、熱方程式を一般化した擬同次型方程式の初期値問題の発散解に対するボレル総和可能性の十分条件、すなわち、初期値に対する大域的な指数増大条件の下、ボレル和の積分核を用いた積分表示を与えました。そのボレル和の構成方法は熱方程式の場合と違い、発散する一般超幾何級数のボレル和の解析接続を用いることによって得られました。
③さらに、ボレル和は具体的には、複素平面上原点からのいくつかの半直線に沿う積分の和として与えられました。
④このように、具体的にボレル和を与えたことにより、古典解とボレル和の積分表示が全く違うことが判ります。
⑤さらに、その見かけ上全く違う積分表示で与えられる解が、ボレル和の定義領域を実数に制限することによる解析接続により、古典解が得られることが判りました。この事実はボレル和を積分核を用いた積分表示で与えることにより、明白になったのであります。
⑥また、積分核が特殊関数で与えられたため、その特殊関数の様々な性質と関係式を導くことも必要となります。それゆえ、この研究からは特殊関数の性質、関係式の再認識をもたらし、また、そのことに再確認させられます。
このようにボレル和を具体的に与えることにより、その構造が白日の下にさらされます。

2．研究の目的

(1)一般の非コワレフスキ型定数係数偏微分方程式の初期値問題の発散解に対するボレル総和可能性とそのボレル和の積分核を用いた積分表示を与えることを目的とします。
(2)また、ボレル和が得られる場合には、ボレル和と古典解との関係を明らかにすることです。
具体的には、熱方程式に代表される非コワレフスキ型の偏微分方程式の初期値問題に対して、たとえ、初期値に正則な関数を与えたとしても、時間変数に関する発散級数解が現れます。このような発散級数解にボレル総和法を通じて解析的な意味づけを与え、その解析解であるボレル和の積分核を用いた積分表示を与えることにより、ボレル和の構造を明らかにすることを目的とします。

3．研究の方法

(1)発散級数解：本研究のボレル総和可能性とボレル和の構造の研究のために発散級数解を解析しやすい形で求める必要がある。
①発展方程式を扱っているため、解は時間変数に関するべき級数解として一意的に決まり、その係数関数は空間変数に関する微分・差分方程式を満たすことになります。この係数関数を変数分離的に扱い、上手く微分と差分を分離させ、定数係数線形差分方程式のみに帰着する方法で着手する。
②その後は差分方程式の性質と母関数の積分表示を上手く用いることにより、発散級数

解を扱いやすいきれいな形で与える。

(2)作用素の分解：常微分方程式論に出てくる階数低下法の偏微分方程式への応用。
①多項式版ユークリッドの互除法を応用することにより、作用素を分解する。このことにより、より階数の低い方程式に帰着できる。
②単純に作用素が因数分解できる場合には、未知関数の置き換えをすることにより、斉次方程式を非斉次方程式へ帰着することによる階数低下法を適用する。

(3)その他：これらの方法で上手くいかない場合、または、より一般の方程式を扱う場合には、解析学の常套手段の一つである、関数空間上の縮小写像の原理や逐次近似法を用いることになります。
①縮小写像の原理を用いることは、微分方程式をある種の積分方程式に帰着して議論を進めることになります。本研究の場合は、コンボルーションを含む積分方程式となります。この縮小写像の原理は、解の存在証明に用いられています。しかし、本研究の目的の一つにある解の具体的な積分表示を得るためには、積分方程式の理論の更なる工夫が必要となるでしょう。
②作用素がより一般的になる場合は、主要な項とそうで無い項とに分けて逐次近似を用いることは良く行われている手法であります。この場合、扱う方程式が斉次方程式から非斉次方程式へ変換されます。それゆえ、(2)でも出てきたように、非斉次方程式は一つの重要なポイントとなるのかもしれません。

４．研究成果

(1)非斉次方程式：本研究では、いろんな場面においても斉次から非斉次方程式へ帰着されることが多くある。単純な非斉次熱方程式の初期値問題の発散解に対するボレル総和可能なための十分条件は斉次の場合とほとんど同様にして得られることが判った。しかし、ボレル和の構造や方程式の拡張に至っていない。より一般の方程式を扱うためには今後重要となる考え方である。

(2)発散級数解：方程式を斉次から非斉次に帰着した場合、その発散解は斉次方程式のずらした初期値に対する解の重ね合わせによって得られる(デュアメルの原理)。したがって、この場合、斉次方程式の発散解の性質は、低階の方程式の解の性質に依ることがわかる。しかし、ボレル和の構造や方程式の拡張には至っていない。

(3)作用素の分解：ユークリッドの互除法による作用素の分解により、形式解が既知の発散級数の線形結合で与えられることになる。正確には、形式解は空間変数のみの定数係数線形非斉次常微分方程式を満たす解として与えられ、非斉次項には単純な斉次方程式の初期値問題の発散解の線形結合が現れる。それゆえ、形式解の総和可能性は非斉次項に現れる発散級数の性質に帰着されることになる。後はこの事実をいかにしてまとめ上げるかが残された課題である。

(4)作用素の因数分解：作用素が因数分解できる場合には、未知関数を置き換えることにより、より低次の方程式に帰着できる。ただし、扱う方程式が非斉次方程式になる。よって、後は非斉次方程式に対する初期値問題を考える。発散解は非斉次項に現れる関数に逐次依存することになるが、帰納的に発散解の総和法の性質を知ることが出来る。しかし、ボレル和を具体的に与えることまでは現在の段階では至っていない。

(5)特異常微分方程式系の不確定度の特徴づけ：発散級数解の発散の度合（不確定度）を知ることによって、初めてボレル総和法が適用できる。この不確定度をボレビッチの意味で係数行列の原点での零点の位数によって特徴付けた。
特異点を持つ微分方程式において、その特異点での解の発散の度合（特異性の位数）を知ることはもっとも基本的な問題の一つであり、単独方程式については古くから良く知られています。具体的には、特異点が確定特異点の場合には、解はその特異点の近くで多項式のオーダーで発散する。不確定特異点の場合は、特異点の近くで、多項式のオーダーでは評価することが出来ず、指数増大の評価をもつ。方程式系については、係数行列の主要部が冪零行列の時には特異性の位数の評価に関する結果はあまり知られていませんでした。具体的には、見かけ上、確定特異点型の常微分方程式系に対して、その解の特異点での振舞いは、一般には発散するのだが、係数行列の主要部が冪零行列の場合は収束する場合もあった。しかし、特異点が確定特異点となるための必要十分条件については、1970 年代において詳しく研究されました。そこで、不確定特異点の場合に、確定特異点の場合の結果の類似、及び、より詳しい結果を得ました。具体的には、解に対する指数増大評価の指数によって不確定度(特異性の位数)を定義し、その不確定度を特徴付けた。
① 方程式系を多項式環上の可逆行列を用いた線形変換によって、非退化型特異方程式系に移すことが出来ることを示し、特異性の位数の正確な評価を与えました。
② 次に、係数行列に対して、帰納的に定義した行列関数列の零点の位数の評価と特

異性の位数との一対一対応を与えました。

③ また、係数行列をテーラー展開したときの最初からいくつまでの項が、特異性の位数を決定しているのかについて調べました。

④ さらに、与えられた方程式系の微分作用素を形式的ジュブレイ空間での写像として考えたときの、インデックス（その定義は核の次元と余核の次元との差）のジュブレイ指数に関する不連続性と特異性の位数を導きました。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

著者名：三宅正武、<u>市延邦夫</u>

論文標題：Irregularity for singular system of ordinary differential equations in complex domain

雑誌名：Funkcialaj Ekvacioj 52(2009), p.53—82、査読有り

〔学会発表〕（計　３件）

発表者名：<u>市延邦夫</u>

発表標題：Characterization of Irregularity for singular system of ordinary differential equations in complex domain

学会等名：Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis

発表年月日：2008 年 5 月 30 日

発表場所：京都大学数理解析研究所

発表者名：<u>市延邦夫</u>

発表標題：Characterization of Irregularity for singular system of ordinary differential equations in complex domain

学会等名：Formal and Analytic Solutions of Differential Equations

発表年月日：2008 年 8 月 11 日

発表場所：Banach International Mathematical Center(Poland)

発表者名：<u>市延邦夫</u>

発表標題：On the characterization of Irregularity for singular system of ordinary differential equations in complex domain

学会等名：Global Behaviors of Differential Equations—Singularity and Transformation Theory—

発表年月日：2008 年 9 月 9 日

発表場所：広島大学･理学研究科

６．研究組織

(1)研究代表者

市延　邦夫（ICHINOBE　KUNIO）

神奈川工科大学・基礎･教養教育センター・准教授

研究者番号：20434417