様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年３月３１日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９７４００９２
研究課題名（和文）　非線形拡散方程式における進行波と界面ダイナミクスの研究

研究課題名（英文）　A study of dynamics of a traveling wave and a interface in nonlinear diffusion equations

研究代表者
柳下　浩紀（YAGISITA　HIROKI）
京都産業大学・理学部・准教授
研究者番号：８０３４９８２８

研究成果の概要（和文）：非線形系の拡散現象は、物理学、化学、生物学、さらに近年は金融工学上のモデル等、多くの分野で現れる。それらの中には、急激な状態変化が狭い領域に集中する界面と呼ばれる局在構造が現れて、この界面の示す振る舞いを理解することが非線形現象を解明する上での鍵になることが数多くある。進行波解はこの界面を構成する特殊解である。本研究では、非線形拡散現象における界面と進行波のダイナミクスについて数理的な解析を行った。

研究成果の概要（英文）：The diffusion phenomenon of the nonlinear system appears in a lot of fields like physics, chemistry, biology, and recently, the financial engineering etc. In them, the localized structure that is called an interface where a rapid state variation concentrates on the narrow confine appears, and there are a lot that understanding the behavior that this interface shows becomes a key to clarify a nonlinear phenomenon. The traveling wave solution is a special solution that composes this interface. In the present study, the dynamics of the interface and the traveling wave in the nonlinear diffusion phenomenon was mathematically analyzed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
総　計	2,000,000	450,000	2,450,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：応用数学、解析学、関数方程式論

１．研究開始当初の背景

Fisher-KPP 方程式においてはある一定速度以上の進行波解が常に存在して、その速度未満の進行波解は存在しないことが知られている。この結果はより広範な単安定非線形拡散系のクラスに一般化されていたが、力学系としての構造がコンパクト力学系と呼ばれる性質をもつ場合であった。空間一次元の系については、この性質をもたない場合についてもいくつかの具体的な方程式に対して同様な結果が得られていた。本研究ではこの結果が成り立つための極めて簡便な十分条件を与えて、個別の方程式に対して得られていた結果を一般化する、という動機が背景にあった。

２．研究の目的

非線形系の拡散現象は、物理学、化学、生物学、さらに近年は金融工学上のモデル等、多くの分野で現れる。それらの中には、急激な状態変化が狭い領域に集中する界面と呼ばれる局在構造が現れて、界面の示す振る舞いを理解することが非線形現象を解明する上での鍵になることが数多くある。界面は、進行波解と呼ばれる「一定の波形と一定の速度を保ちながら進行する解であり、その波形が（進行方向に沿った）空間無限大の極限において一様な状態に収束するもの」を空間的に緩やかに歪めて構成される。これら界面と進行波のダイナミクスについて研究を行うことが目的であった。

３．研究の方法

まず、単安定系の進行波解の存在・非存在問題に取り組んだ。ここでは力学系のコンパクト性を仮定しないため、空間一次元の問題であることと系の平行移動不変性と単調性を巧妙に組み合わせた議論を行った。さらに、単安定系の結果と手法を推し進めて、双安定型の進行波解の存在問題に取り組んだ。

４．研究成果

非局所的な拡散効果を持つ反応拡散系を主に空間一次元の場合について研究した。主な具体的成果は以下の通りである。

（１）

フィッシャー・タイプの非線形性を持ち、数直線上で正の側に合わせる拡散の効果が少しでも存在する場合を取り扱う。さらに、遠方に合わせる拡散の効果が異常に大きくない通常のケースを考えることにする。この場合について、擾乱の伝播について考察する。まず、初期の擾乱が各場所で小さいとしても、それが広範囲に渡れば、擾乱は伝播する、ということを明らかにすることができた。その伝播速度は数直線上で（初期の擾乱の位置に対して）正の方向、及び、負の方向のそれぞれについて、初期の擾乱の状態には依らない一定の値を持っていて、それら一定の伝播速度は、正の方向への伝播速度は（少なくとも）非負であり、負の方向への伝播速度は（より強く主張できて）正であることが分かった。さらに、それぞれの伝播速度を与える簡単な（ひとつの）公式を得ることができた（定理１）。この具体的な結果を得るために次のような研究を行った。

当該の反応拡散系は、有界連続関数の集合上に連続力学系を導く。その時間ｔ写像によって定義される離散力学系を考える。ここでｔは任意の正の定数である。一様有界な初期条件の列を考える。その列は有界連続関数に広義一様収束するとする。このとき、初期条件の列が導く時刻ｔ後の状態関数の列は、ある有界連続関数に広義一様収束し、その極限関数は初期条件の列の極限関数を初期条件とした時刻ｔ後の状態関数に一致する（補題２）。

当該の反応拡散系から非線形性を除いた非局所的な拡散効果を持つ「線形拡散系」を考える。さらに、この線形拡散系が有界連続関数の集合上に導く連続力学系の時間ｔ写像によって定義される離散力学系を考える。この離散力学系は、ある有限ボレル測度との合成積を取る作用によって定義される離散力学系と一致し、さらに、その有限ボレル測度と非局所拡散効果の間にある量的な関係式が成立する（補題３）。実は、この補題３を証明することが定理１を示す上での技術的な核心である。

当該のフィッシャー・タイプの反応拡散系とそれを不安定一様定常解において線形化した「線形拡散系」との関係を考える。まず、その一様定常解の近傍において、線形化した拡散系のほうが（関数の通常の意味での順序関係で）元の反応拡散系よりも不安定である（補題４）。しかし、その線形系を「１より小さい正の定数倍した系」は（一様定常解の十分に小さな近傍において）元の反応拡散系よりも安定である（補題５）。

以上の補題２、３、４、５により H. F. Weinberger (1982) による結果を利用できる。すなわち、伝播速度は不安定一様定常解において線形化した「線形拡散系」が導く離散力学系を合成積による作用で与える有限ボレル測度からある公式によって決まる量である。ところが、この有限ボレル測度と不安定一様定常解において線形化した「線形拡散系」の間に関係式を導いていたので、結局、伝播速度は、この線形拡散系から、すなわち、元の反応拡散系の非局所拡散効果からある公式によって決まる量である。さらに、この公式（及び、数直線上で正の側に合わせる拡散の効果が少しでも存在する、という仮定）から、それぞれの方向への伝播速度の非負性、正値性が導かれる。

（２）

次に、（より一般的に）単安定な非線形性を持つ場合について考える。まず、（単安定性の仮定には特によらず）、この非局所拡散系は有界ボレル可測関数の集合上に（より正確には、Ｌ無限空間の上に）連続力学系を生成する。ここで、空間の位相はＬ無限ノルムより定まる位相とする。この力学系において進行波解、及び、（時間的）周期進行波解の

存在問題を考察する。進行波解とは一定の形状を保ったまま、一定速度で動いていく解のことをいい、(時間的) 周期進行波解とは、一定時間後に元と全く同じ形状の状態へと戻る (ただし、その位置は動いても構わない) 解をいう。したがって、進行波解は周期進行波解の特別な場合である。そして、周期進行波解が元の形状に戻る時間とその移動距離から周期進行波解の (平均) 速度が定義される。

まず、正の方向の遠方に合わせる拡散の効果が異常に大きくない通常のケースを考える。その場合に、周期進行波解の (平均) 速度に最小値が存在する。そして、この最小 (平均) 速度よりも大きい任意の値に対して、その値を進行速度とする進行波解でその形状が単調であるものが存在する (定理６)。

次に、正の方向の遠方に合わせる拡散の効果が異常に大きく、さらに、不安定一様定常解において線形化した「線形拡散系」が不安定であるとする。この場合には、周期進行波解は存在しない (定理７)。

一方、正の方向の遠方に合わせる拡散の効果が異常に大きく、さらに、不安定一様定常解において線形化した「線形拡散系」が中立安定である場合に、周期進行波解が存在するか、どうか、については、今までのところ、よく分からなかった。ただし、(このような場合でも) 周期進行波解が存在すれば、その周期進行波解の (平均) 速度を進行速度とする進行波解でその形状が単調なものが存在する (定理８)。また、進行波解でその形状が単調なものの進行速度の下限は負の無限大ではなく (すなわち、実数、あるいは正の無限大であり)、この下限よりも大きい任意の値に対して、その値を進行速度とする進行波解でその形状が単調であるものが存在する (補題９)。

さらに、定理６を示すために、有界非減少左連続関数の集合上の力学系の性質を抽象的に考察した。

まず、離散力学系について考える。そのために、いくつかの定性的な基本性質を仮定する。一様有界な (非減少左連続関数の) 列が (ある左連続関数に) 広義一様収束するとき、列が写像により写された列は、元の列の極限 (関数) が写像により写された関数にほとんど至るところ収束する、と仮定する。写像は (関数の通常の意味での) 順序関係を保つ、と仮定する。写像は平行移動について不変である、と仮定する。写像は単安定である、と仮定する。平行移動不変性により、定値関数は定値関数に写されることに注意する。

第一に、この離散力学系を動座標系の上で考える。そのとき、一様有界な (非減少左連続関数の) 列を考える。これが (動座標系の上で見た力学系に対する) 優解であり、その関数値の列の下限がある点で一様不安定解の取る値よりも大きく、その関数値の列の下極限がある点で一様安定解の取る値よりも小さいとすると、(動座標系の上で見た力学系に対して) 進行速度が０となる進行波解が存在する (命題１０)。実は、この命題１０を証明することが定理６を示す上での技術的な核心である。

次に、元の (つまり、動座標系に乗らない) 離散力学系に戻る。周期進行波で優解となるものが存在したとすると、その優解の (平均) 速度を進行速度とする進行波解が存在する (定理１１)。また、進行波解の進行速度の下限は負の無限大ではなく (すなわち、実数、あるいは正の無限大であり)、この下限よりも大きい任意の値に対して、その値を進行速度とする進行波解が存在する (定理１２)。

さて、連続力学系については、次のような定性的な基本性質を仮定する。ｔを正の数とすると、連続力学系の時間ｔ写像が定める離散力学系は上で仮定したのと同じ定性的な基本性質を持つ、と仮定する。正の数からなる数列と (有界非減少左連続) 関数を考える。その数列が０に収束するならば、数列が定める時間分の時間ｔ写像によってその関数を写すことで導かれる (関数) 列は、元の関数にほとんど至るところ収束する、と仮定する。

このとき、離散力学系と同様に、次のことが成り立つ。周期進行波で優解となるものが存在したとすると、その優解の (平均) 速度を進行速度とする進行波解が存在する (定理１３)。また、進行波解の進行速度の下限は負の無限大ではなく、この下限よりも大きい任意の値に対して、その値を進行速度とする進行波解が存在する (定理１４)。

上記の定理１３を用いて定理８が示され、さらに、定理１４により補題９はほぼ明らかである。そして、定理８、補題９を用いて、定理６が示される。

実は、定理７の証明のアイディアは、定理１のそれとほぼ同じであり、定理１の証明の方法を発展させることで、定理７が示される。すなわち、定理７の仮定の下では、定理１と同様の伝播速度の公式が成立し、伝播速度が実は無限大であることが分かる。したがって、周期進行波解は存在しない。

(３)

次に、双安定な非線形性を持つ場合について考える。より正確には、２つの安定な一様定常解の間に、ただ１つの一様定常解があり、それは「線形不安定」であるとする。このとき、これらの２つの安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解が存在する (定理１５)。

さらに、定理１５を示すために、（定理６のときと同様に）有界非減少左連続関数の集合上の力学系の性質を抽象的に考察する。

まず、離散力学系について考える。いくつかの定性的な基本性質を仮定する。一様有界な（非減少左連続関数の）列が（ある左連続関数に）広義一様収束するとき、列が写像により写された列は、元の列の極限（関数）が写像により写された関数にほとんど至るところ収束する、と仮定する。写像は（関数の通常の意味での）順序関係を保つ、と仮定する。写像は平行移動について不変である、と仮定する。写像は双安定である、すなわち、２つの安定な一様定常解の間に、ただ１つの一様定常解があり、それは不安定である、と仮定する。

このとき、離散力学系について、次が成立する。すなわち、下の安定な一様定常解と間の不安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度は常に、間の不安定な一様定常解と上の安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度よりも大きいと仮定する。さらに、２つの進行波を考える。ひとつは優解で、他方は劣解とする。優解については、負の遠方では下の一様定常解に一致し、正の遠方では間の一様定常解よりも大きいとし、劣解については、負の遠方では間の一様定常解よりも小さく、正の遠方では上の一様定常解に一致するとすると、この優解よりも進行速度が速くなく、この劣解よりも進行速度が速くないような、２つの安定な一様定常解を結ぶ進行波解が存在する（定理１６）。

同様に、下の安定な一様定常解と間の不安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度は常に、間の不安定な一様定常解と上の安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度よりも大きいと仮定すると、２つの安定な一様定常解を結ぶ進行波解が常に存在する（系１７）。

前述したのと同様に、連続力学系について次の定性的な基本性質を仮定する。ｔを正の数とすると、連続力学系の時間ｔ写像が定める離散力学系は上で仮定したのと同じ定性的な基本性質を持つ、と仮定する。正の数からなる数列と（有界非減少左連続）関数を考える。その数列が０に収束するならば、数列が定める時間分の時間ｔ写像によってその関数を写すことで導かれる（関数）列は、元の関数にほとんど至るところ収束する、と仮定する。

このとき、連続力学系について、離散力学系におけるのと同様に、次が成立する。すなわち、下の安定な一様定常解と間の不安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度は常に、間の不安定な一様定常解と上の安定な一様定常解を単調に結ぶ進行波解の進行速度よりも大きいと仮定する。さらに、２つの進行波を考える。ひとつは優解で、他方は劣解とする。優解については、負の遠方では下の一様定常解に一致し、正の遠方では間の一様定常解よりも大きいとし、劣解については、負の遠方では間の一様定常解よりも小さく、正の遠方では上の一様定常解に一致するとすると、この優解よりも進行速度が速くなく、この劣解よりも進行速度が速くないような、２つの安定な一様定常解を結ぶ進行波解が存在する（定理１８）。

定理１６、１８と間の不安定な一様定常解に関する上下双方の擾乱の伝播速度を評価して上下双方の単安定系の進行波解の進行速度を比較することにより、定理１５が示される。

（４）

コンパクト性を仮定せずに、かつ、簡単な仮定のみで、進行波解の存在について明確な結論を得たものは今までになかった。空間が多次元の場合や媒質が一様でなく周期的である場合などが、今後の重要な問題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 柳下浩紀、Existence of Traveling Wave Solutions for a Nonlocal Bistable Equation: An Abstract Approach 、Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences、査読有、Vol. 45、2009、pp.955-979.

② 柳下浩紀、Existence and Nonexistence of Traveling Waves for a Nonlocal Monostable Equation、Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences、査読有、Vol. 45、2009、pp.925-953.

③ 柳下浩紀、The spreading speeds of disturbance in a nonlocal Fisher equation、京都産業大学論集. 自然科学系列、査読有、Vol. 38、2009、pp.1-10.

６．研究組織

(1)研究代表者

柳下　浩紀（YAGISITA　HIROKI）

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：８０３４９８２８

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし