様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１３日現在

機関番号：１３７０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：19760055
研究課題名（和文） 固有値問題における，解の存在証明及び数値解の高速な精度保証法に関する研究
研究課題名（英文） Fast enclosure for solutions in eigenvalue problems

研究代表者
宮島 信也（MIYAJIMA SHINYA）
岐阜大学・工学部・准教授
研究者番号：20367072

研究成果の概要（和文）：本研究では，固有値問題における，解の存在証明，及び近似解の精度に関する，理論的に厳密で定量的な保証を，計算機による浮動小数点演算を用いて与える方法，すなわち，固有値問題の解の精度保証付き数値計算法を構築した．

研究成果の概要（英文）：We developed theory and algorithms for numerically enclosing solutions in eigenvalue problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総 計	3,200,000	660,000	3,860,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎
キーワード：数理工学（数理的解析・計画・設計），固有値問題，解の存在証明，精度保証

１．研究開始当初の背景

本研究では，一般化固有値問題

$$Ax = \lambda Bx \qquad (1)$$

（A，B は正方行列，λ は固有値，x は λ に対応する固有ベクトル） における解の精度保証付き数値計算法について考える．A が対称行列で B が対称正定値行列の場合，すべての固有対（固有値と固有ベクトルの対）の精度保証付き数値計算法は知られていなかった．また，A が非対称行列あるいは B が対称正定値行列ではない場合でも適用可能な，すべての固有値の精度保証付き数値計算法は知られていなかった．

２．研究の目的

本研究の目的は以下に示す精度保証付き数値計算法の構築である．

手法１ （１）において，A が対称行列で B が対称正定値行列の場合に適用可能な，すべての固有対に対する精度保証付き数値計算法

手法２ （１）において，A が非対称行列あるいは B が対称正定値行列ではない場合でも適用可能な，すべての固有値に対する精度保証付き数値計算法

３．研究の方法

本研究では，３．１．節，３．２．節に記された方法を行い，研究の目的を達成させた．以後，本研究では I を単位行列とする．

３．１．手法１を構築するための方法

２．節で述べた手法１を確立するために，定理１－４を証明した．

定理１　A，B は対称行列であるとする．$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ と $\mu_1,\cdots,\mu_n$ をそれぞれ（１）における固有値とそれらの近似とする．ただし，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ と $\mu_1,\cdots,\mu_n$ は次の大小関係を満たしているとする．

$$\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$$

$$\mu_1 \le \cdots \le \mu_n$$

ベクトル $y^{(1)},\cdots,y^{(n)}$ を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ に対応する固有ベクトルの近似とする．行列 D，X，R，G を次のように定義する．

$$D = diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

$$X = (y^{(1)},\cdots,y^{(n)})$$

$$R = AX - BXD$$

$$G = X^T BX$$

$\|I-G\|_2 < 1$ が成り立つとき，B は正定値行列であり，$i=1,\cdots,n$ に対して

$$|\lambda_i - \mu_i| \le \delta$$

$$\delta = \beta\|R\|_2 /(1-\|I-G\|_2)，\ \beta \ge \sqrt{\|B^{-1}\|_2}$$

が成り立つ．

定理２　$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\mu_1,\cdots,\mu_n$，$y^{(1)},\cdots,y^{(n)}$，$\beta$ を定理１と同様に定義する．このとき

$$\min_{1\le j\le n}|\lambda_j - \mu_i| \le \varepsilon_i，\ i=1,\cdots,n$$

$$\varepsilon_i = \beta\|r^{(i)}\|/\sqrt{g_i}$$

$$r^{(i)} = Ay^{(i)} - \mu_i By^{(i)}$$

$$g_i = y^{(i)T}By^{(i)}$$

が成り立つ．

定理３　δ，ε_i，$i=1,\cdots,n$ をそれぞれ定理１，２と同様に定義する．このとき

$$\varepsilon_i \le \delta$$

が成り立つ．

定理４　$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\mu_1,\cdots,\mu_n$，$y^{(1)},\cdots,y^{(n)}$，$\beta$ を定理１と同様に定義する．$r^{(i)}$，g_i，$i=1,\cdots,n$ を定理２と同様に定義する．また，$|\lambda_i - \mu_i| \le \eta_i$，を満たす $\eta_1,\cdots,\eta_n$ が得られていることを仮定する．$\rho_1,\cdots,\rho_n$，ϖ_i を次のように定義する．

$$\rho_1 = \mu_2 - \mu_1 - \eta_2$$

$$\rho_k = \min(\mu_k - \mu_{k-1} - \eta_{k-1}, \mu_{k+1} - \mu_k - \eta_{k+1})$$

$$(k = 2,\cdots,n-1)$$

$$\rho_n = \mu_n - \mu_{n-1} - \eta_{n-1}$$

$$\varpi_i = \beta\|r^{(i)}\|/\rho_i$$

$\rho_i > 0$，$\varpi_i < \sqrt{g_i}$ が成り立つとき，λ_i に対応する固有ベクトル $z^{(i)}$ が存在し

$$\|z^{(i)} - y^{(i)}\| \le \xi_i$$

$$\xi^{(i)} = \beta\varpi_i$$

を満たす．

そして，定理１－４に基き，$\mu_1,\cdots,\mu_n$，$y^{(1)},\cdots,y^{(n)}$ に対する誤差限界を高速に算出する手法を実装し，数値実験を行った．

３．２．手法２を構築するための方法

２．節で述べた手法２を確立するために，定理５を証明した．

定理５　既存の数値計算法を適用した結果，$AX \approx BXD$ を近似的に満たす行列 D，X が得られたことを仮定する．ただし，D は対角行列である．D の対角成分を $\mu_1,\cdots,\mu_n$ とし，Y を任意の行列とする．行列 R，G を次のように定義する．

$$R = Y(AX - BXD)$$

$$G = X^T BX - I$$

$\|G\|_\infty < 1$ が成り立つとき，B，X，Y は正則であり

$$\min_{1\le i\le n}|\lambda-\mu_i|\le\varepsilon$$
$$\varepsilon=\|R\|_\infty/(1-\|G\|_\infty)$$

が成り立つ.

そして，定理５に基き，$\mu_1,\cdots,\mu_n$，
に対する誤差限界を高速に算出する手法を実装し，数値実験を行った.

４．研究成果

２．節で述べた精度保証付き数値計算法に関して国内外の学会で発表し，論文を発表した.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件，すべて査読有り）

① Shinya Miyajima, Fast enclosure for solutions in underdetermined systems, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 234, Issue 12, pp. 3436-3444, October 2010

②S. Miyajima, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi, Fast verification for all eigenpairs in symmetric positive definite generalized eigenvalue problems, Reliable Computing, Vol. 14, pp. 24-45, June 2010

③Shinya Miyajima, Fast enclosure for all eigenvalues in generalized eigenvalue problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 233, Issue 11, pp. 2994-3004, April 2010

〔学会発表〕（計８件）

［国外］

① Shinya Miyajima, Error bounds for computed eigenvalues in generalized eigenvalue problem, Proc. 14th GAMM – IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Lyon, France, pp. 95-96, September 2010

② Shinya Miyajima, Enclosing all eigenpairs in symmetric positive definite generalized eigenvalue problems, Proc. The 8th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Island of Rhodes, Greece, pp. 945-948, September 2010

③ Shinya Miyajima, Enclosing all eigenvalues in generalized eigenvalue problem, Proc. 13th GAMM – IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Texas, US, pp. 73-74, September 2008

④ S. Miyajima, T. Ogita, S. Oishi, Verifying all eigenpairs in real symmetric positive definite generalized eigenvalue problem, Proc. 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Zurich, Switzerland, pp. 2020061-2020062, July 2007

［国内］

⑤宮島信也，一般化固有値問題における各固有値に対する数値的包含，日本応用数理学会 2010 年度年会 講演予稿集，明治大学, pp. 49-50, 2010 年９月

⑥宮島信也，一般化固有値問題におけるすべての固有値の数値的包含，日本応用数理学会 2009 年度年会 講演予稿集，大阪大学, pp. 305-306, 2009 年９月

⑦宮島信也，荻田武史，Siegfried M. Rump，大石進一，一般化固有値問題におけるすべての固有対の高速精度保証，日本応用数理学会 2007 年度年会 講演予稿集，北海道大学, pp. 220-221, 2007 年９月

⑧宮島信也，荻田武史，Siegfried M. Rump，大石進一，実対称正定値一般化固有値問題におけるすべての固有対の精度保証，第 36 回数値解析シンポジウム講演予稿集，ウェルシティ湯河原，pp. 137-140, 2007 年６月

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕無し

６．研究組織

(1)研究代表者

宮島 信也 (MIYAJIMA SHINYA)

岐阜大学・工学部・准教授

研究者番号：20367072

(2)研究分担者　無し

(3)連携研究者　無し