

平成 21 年 4 月 5 日現在

研究種目：若手研究(スタートアップ)

研究期間：2007～2008

課題番号：19840025

研究課題名(和文) 頂点作用素代数から導かれる等式

研究課題名(英文) Formulas derived from vertex operator algebras

研究代表者 山内 博 (YAMAUCHI HIROSHI)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：40452213

研究成果の概要：

頂点作用素代数の構造論とその自己同型群の指標理論の間には深い関連があると考えられている。その一端を明らかにすべく、頂点作用素代数の構造論及び表現論の両方から自己同型の情報を具体的に計算しうる公式を導出する研究を行った。

頂点作用素代数の構造論からのアプローチでは、これまで頂点作用素代数の場合に考えられていたグライス代数の概念を頂点作用素超代数の場合へと一般化を行い、拡大されたグライス代数を定式化することで、その上の跡公式を導出した。また、得られた跡公式を散在型有限単純群の一つであるベビーモンスターをその自己同型群に持つ、ベビーモンスター頂点作用素超代数に応用し、ベビーモンターの $2A$ 元と $N=1$ $c=7/10$ ヴィラソロ頂点作用素超代数との間の一対一対応関係を確立した。この成果は今後ベビーモンスターから描かれる拡大 $E7$ 型ディンキン図形の研究に応用できる。

表現論からのアプローチでは、半単純ではない表現から得られる圏の構造について調べるべく、 $C2$ 有限条件を満たしているが有理型ではない頂点作用素代数の無限系列であるトリプレット $W(p)$ 代数の表現から得られる圏の研究を行った。これまでにアーベル圏としての構造をほぼ決定できた。その後関連する研究情報と比較を行った所、表現の圏が半単純でない場合には、テンソル積がブレイディングを持たない可能性があることが判明した。この問題に関しては未だ解決を見ていないが、今後の研究方針を決める上で非常に示唆的であり、この分野の研究はますます重要性を増すものと考えられる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,350,000	0	1,350,000
2008年度	1,350,000	405,000	1,755,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,700,000	405,000	3,105,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学・

キーワード：頂点作用素代数、ヴィラソロ代数、ベビーモンスター、共形場理論

1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は二次元共形不変性を司るヴィラソロ代数の対称性を拡張した概念であり、二次元共形場理論を代数的に定式化した無限次元代数系と捉えることができる。そのため頂点作用素代数の理論は共形場理論と関連する数学の諸分野と深く関係しており、モンスター散在型有限単純群と保型形式にまつわるムーンシャイン現象をはじめ、無限次元リー代数や量子群、組紐群やテンソル圏、リーマン面の変形とモジュライ理論、結び目、絡み目と三次元位相不変量等、その理論が数学全体に与える影響は少なくない。

このように様々な分野と関わりのある中でも、特にモンスター単純群との関係に焦点を当ててみる。ムーンシャイン現象の解明に見られるように、頂点作用素代数の構造論とその自己同型群の指標理論との間には深い関連があると考えられている。応用を考えた場合、より直接的に、これらの間の架け橋となる数学的構造が求められており、それを具体的に体現する公式を見出すことは非常に重要であった。そこで頂点作用素代数の自己同型の作用を記述するにあたり、これを頂点作用素代数に内在する構造論から導出する機構として、跡公式を求める研究を進める必要があった。これは短期集中型の研究課題である。

一方、数学の諸分野との関わり合いを明確にする場合、頂点作用素代数の内包する本質的な情報を他と比較可能な形で表現する必要がある。その一つのに、表現から得られる圏を用いることができる。よって、構造論だけではなく、表現論を用いて頂点作用素代数の内包する情報を体現する圏構造を構成し、その性質を解析する必要があった。こちらは長期的視野に立った研究課題である。

2. 研究の目的

大まかに分けて二つの研究目標を設定した。一つは短期集中型の目標としての、頂点作用素超代数における跡公式の導出であり、もう一つは長期的視野に立って頂点作用素代数の表現から得られる圏構造についての研究を行い、質量公式など、圏構造から得られる等式の導出である。

まず一つ目の跡公式については、頂点作用素の自己同型の跡を頂点作用素代数構造そのものから導きえる公式を求めべく、これまでに得られている跡公式を拡張・一般化する。特に散在型有限単純群の一つであるベビーモンスターを扱うためには、その作用を持つベビーモンスター頂点作用素超代数へ応用できるように、跡公式を頂点作用素超代数へと拡張を行う。そして得られた公式を具体的にベビーモンスター頂点作用素超代数に適用することで、ベビーモンスター単純群の $2A$ 元の持つ神秘的な性質の数学性の研究への応用を目指した。

二つ目の頂点作用素代数の表現から得られる圏の研究については、これまでの研究は主に表現が半単純な場合のみを取り扱っていることを踏まえて、そこから一步踏み出すべく、半単純ではないが適切な有限性条件を満たす頂点作用素代数の表現から得られる圏について調べる。一般論から C_2 有限性条件を満たす頂点作用素代数はアルティン環上の表現と同値になることが知られている。特に既約表現の同型類の個数は有限個である。しかし一方で、 C_2 有限性条件を満たすが、有理型ではない頂点作用素代数の場合、指標のモジュラー変換を行うと、既約加群の指標だけでは閉じず、対数型共形場理論において扱われる一般指標を用いる必要があることも分かっている。このクラスの頂点作用素代数の表現から得られる圏にもテンソル積の構造が導入できるはずであり、有理型の場合にはフェアリンドの公式として知られているフュージョン積と指標のモジュラー変換則を結びつける公式の対応物があることが期待されている。これらの確立を目指すべく、半単純とは限らない頂点作用素代数の表現の圏について基本的な性質を明らかにすることを目指した。

3. 研究の方法

頂点作用素代数の構造論からのアプローチと表現論からのアプローチで研究を進めた。

構造論からはグライス代数の概念を頂点作用素超代数の場合に拡張し、その上の跡公式を導出する。その際、自己同型群への応用を主眼においているため、跡公式の導出の際に自己同型群による不動点部分代数に関する仮定を用いるのは好ましくない。そこで自己同型群の作用を抜きでも跡公式を導出しえる機構である、共形デザインの構造についても研究を行い、これを $N=1$ 超共形代数へと一般化する研究も行った。そして、得られた跡公式をベビーモンスター散在型有限単純群が作用するベビーモンスター頂点作用素超代数に適用し、ベビーモンスター単純群の $2A$ 元とベビーモンスター頂点作用素超代数に含まれる $N=1$ $c=7/10$ ヴィラソロ頂点作用素超代数と同型な部分代数との対応関係を調べた。この対応関係が一つ一つであることが明らかにした上で、ベビーモンスター単純群から描かれる拡大 $E7$ 型ディンキン図形の研究も進めた。

表現論からは非有理型の頂点作用素代数の表現から得られる圏構造を研究し、その上のテンソル積の定式化を目指した。特に表現が半単純ではないが、適切な有限性条件を満たすクラスである、 $C2$ 有限性条件を満たす頂点作用素代数の表現について研究を行った。そのようなクラスに属する頂点作用素代数の例として、トリプレット $W(p)$ 代数と呼ばれる無限系列が知られている。このクラスの頂点作用素代数に関しては未だ分からないことが多いため、まずトリプレット $W(p)$ 代数の場合について詳しく調べ、その上で一般的な原理を見出し、理論の定式化を計った。具体的には、トリプレット $W(p)$ 代数の表現から得られる圏について研究を行い、半単純でない場合のテンソル積の定式化と、その性質について研究を行い、今後の研究方針を研究の進捗具合に合わせて定めながら総合的な研究を進めた。

4. 研究成果

グライス代数の概念を一般化することで頂点作用素超代数の場合に拡大されたグライス代数を定式化した上で、その上の跡公式を導出した。その応用として、散在型有限単純群の一つであるベビーモンスターをその自己同型群に持つ、ベビーモンスター頂点作用素超代数において、ベビーモンスターの $2A$ 元とベビーモンスター頂点作用素超代数に含まれる $N=1$ $c=7/10$ ヴィラソロ頂点作用素超代数と同型な部分代数との間の一対一対応を明らかに出来た。この結果はベビーモンスター単純群から描かれる $E7$ 型拡大ディンキン図形の研究に応用される。以上は構造論的研究の成果である。

一方、表現論的な研究の成果として、 $C2$ 有限ではあるが非有理型である頂点作用素代数の無限系列であるトリプレット $W(p)$ 代数の表現の研究を行い、得られるアーベル圏の性質をほぼ明らかにできた。その上で、関連する研究結果との比較を行ったところ、非有理型の頂点作用素代数の表現から得られる圏のテンソル積構造はブレイディングを持たない可能性が判明された。この事実は今後テンソル積のさらなる研究を進めていく上で非常に示唆的である。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, Communications in Mathematical Physics **277** 237-285 (2008). (査読あり)

Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, International Mathematics Research Notices **2007** article ID:rnm003, 1-9 (2007). (査読あり)

[学会発表](計 6 件)

山内 博, The extended Virasoro VOAs and related topics, 有限群・頂点作用素代数と組合せ論, 2009年1月, 京都大学数理解析研究所

永友清和, 土屋 昭博, 山内 博, Triplet vertex algebra and the quantum group, 日本数学会 2008 年度秋期総合分科会, 2008年9月, 東京工業大学

山内 博, トリプレット代数と対数型共形場理論, 第 20 回有限群論草津セミナー, 2008年8月, 草津セミナーハウス

Hiroshi Yamauchi, The FLM conjecture and framed VOA, International Conference on Vertex Operator Algebras and Related Areas, 2008 July, Illinois State University, USA

山内 博, 頂点作用素超代数入門, RIMS 共同研究「作用素環と数理物理学の研究」, 2008年1月, 京都大学数理解析研究所

山内 博, 頂点作用素超代数上の跡公式, 第 19 回有限群論草津セミナー, 2007年8月, 草津セミナーハウス

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~yamauchi>

6. 研究組織

(1)研究代表者

山内 博 (YAMAUCHI HIROSHI)
愛知教育大学・教育学部・講師
研究者番号: 40452213

(2)研究分担者

(3)連携研究者