

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2007～2008

課題番号：19840035

研究課題名（和文）不定値計量をもつ空間内の空間的曲面とその特異点の研究

研究課題名（英文）Spacelike surfaces in indefinite spaces and their singularities

研究代表者

藤森 祥一（FUJIMORI SHOICHI）

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：00452706

研究成果の概要： 微分幾何学において、曲面（はめ込み）の大域的な性質は、主に 20 世紀以降研究されてきた。近年、特異点を許容したより広いクラスの曲面を考えることで、今まであまり光を当てられなかった曲面についても、その大域的な性質が活発に研究されるようになりつつある。本研究ではその中でも特に不定値計量をもつ空間内の空間的曲面とその特異点に関する研究を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,350,000	0	1,350,000
2008 年度	1,350,000	405,000	1,755,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,700,000	405,000	3,105,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：極小曲面・平均曲率一定曲面・極大曲面・特異点・不定値計量

1. 研究開始当初の背景

微分幾何学において、曲面（あるいは、より一般にリーマン多様体）の大域的な性質を調べることは、20 世紀以降、重要な研究テーマであった。1931 年に H. Hopf と W. Rinow は、リーマン幾何学の大域的研究にもっとも適しているのは完備なリーマン多様体のクラスであることを示した。このことから、曲面論においても、完備な曲面の大域的な性質が盛んに研究され、多くの興味深い性質が得られてきた。

しかし一方で、完備な曲面が自明なものしかないような曲面のクラスも存在する。そのよ

うなクラスの曲面は、完備な曲面がほとんど存在しないが故に、研究対象になりにくくなっていた。

近年、ある種の特異点を許容したより広いクラスの曲面を考えることで、完備なものがほとんど存在しない曲面にも、大域的に興味深い性質をもつものが豊富に存在することが分かってきた。例えば、岐阜大学の佐治健太郎氏、大阪大学の梅原雅顕氏、九州大学の山田光太郎氏は、はめ込みよりも広い「波面」というクラスでガウス・ボンネの定理など、大域的に興味深い性質を多く示している。

本研究代表者はこれまで、そのような曲面の中でも、特に 3 次元ド・ジッター空間内の平

均曲率 1 をもつ空間的曲面に注目し、その大域的な性質を研究してきた。この曲面は、3次元双曲空間内の平均曲率 1 をもつ曲面（完備なものが豊富に存在し、大域的に興味深い結果がたくさん得られている）と局所的には類似の性質をもつが、完備なものは自明なものに限られるからである。このような曲面に特異点を許容した新しいクラスを定めて CMC-1 face と名付け、その上で改めて完備性を定義し、完備な CMC-1 face が満たす大域的性質を研究した。その結果、曲面の無限遠方（曲面のエンドと呼ばれる）における挙動にある制限を加えると、3次元双曲空間内の平均曲率 1 をもつ曲面と類似の性質をもつことが分かった。その後、神戸大学の Wayne Rossman 氏、梅原氏、山田氏、高麗大学の Seong-Deog Yang 氏との共同研究で、CMC-1 face のエンドの挙動を詳細にしらべ、先に得られた結果から完備性以外の全ての仮定をはずすことに成功した。

また、特異点を許容するクラスを考えることから、特異点の振る舞いも重要な研究テーマとなるが、CMC-1 face の特異点について、佐治氏、梅原氏、山田氏との共同研究で、CMC-1 face に現れるジェネリックな特異点の分類を行った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述の CMC-1 face のような不定値計量をもつ空間内の空間的曲面について、その大域的な性質とその特異点の振る舞いを調べることである。具体的には CMC-1 face の他に、3次元ミンコフスキー空間内の特異点付き空間的極大曲面（極大面と呼ばれる）や3次元光錐内の空間的曲面などである。また、3次元ユークリッド空間内の極小曲面や3次元双曲空間内の平均曲率 1 をもつ曲面は、正定値空間内の曲面であるが、局所的には極大面や CMC-1 face と類似の性質を多く持ち、古くから多くの重要な結果が得られているので、これらの曲面の大域的性質も考察対象とする。

3. 研究の方法

- (1) 最初に、ユークリッド空間内の極小曲面や双曲空間内の平均曲率 1 をもつ曲面の具体例を考察し、曲面の構成法、特に周期問題と呼ばれる問題の解決法を習得する。そしてその方法を用いて極大面や CMC-1 face の新たな例を構成できるか調べる。また、極小曲面としては存在しなかった例が、特異点を許容することで極大面として存在するかどうか、調べる。
- (2) ユークリッド空間内の極小曲面を双曲空

間内の平均曲率 1 をもつ曲面に変形する理論が、Rossman 氏、梅原氏、山田氏らによって得られているが、それと同様の理論を開発して極大面を CMC-1 face に変形する。特に種数のある曲面の構成や変形を試みる。

- (3) 種数 0 で 3 つのエンドをもつ CMC-1 face の分類を試みる。S. Lee 氏と S.-D. Yang 氏は超幾何関数を用いてそのような例を構成しているが、そのモデュライ空間の決定を試みる。
- (4) 東京電機大学の國分雅敏氏らが研究している、3次元双曲空間内の HMC-1 曲面と呼ばれる曲面（線型ワインガルテン曲面と呼ばれる曲面の一種）と CMC-1 face は、互いに単位法ベクトル場になるという関係を持っている。線型ワインガルテン曲面の立場から、CMC-1 face の理論を見直すことで、新しい性質を発見できないか調べる。
- (5) 双曲空間とド・ジッター空間を繋ぐ空間として、光錐がある。3次元光錐内の空間的曲面の理論を確立することで、双曲空間内の曲面とド・ジッター空間内の曲面を統一的に扱えるようになることが期待できるので、3次元光錐内の空間的曲面のもつ性質について調べる。

4. 研究成果

- (1) 神戸大学の Wayne Rossman 氏、大阪大学の梅原雅頭氏、九州大学の山田光太郎氏、高麗大学の Seong-Deog Yang 氏との共同研究で、3次元ド・ジッター空間内の CMC-1 face とその特異点の研究を行った。
 - ① 曲面の無限遠方（エンド）における挙動を解析し、特異点が無限に伸びる条件を明らかにした。また、この結果を用いて、完備な CMC-1 face が満たすオッサーマン不等式と呼ばれる不等式を、等号条件まで込めて証明した。この結果に関して論文を 1 本執筆した。この論文は、学術誌 Communications in Analysis and Geometry に採録されることが決定している。
 - ② 3 つのエンドをもつ完備な CMC-1 face の分類を行った。完備な CMC-1 face のエンドは、楕円型、または第 1 種放物型とよばれる型になることから、3 つのエンドをもつ完備な CMC-1 face は、エンドの型に応じて 4 つのタイプ（3 つの楕円型エンドをもつタイプ、2 つの楕円型エンドと 1 つの第 1 種放物型エンドをもつタイプ、1 つの楕円型エンドと 2 つの放

物型エンドをもつタイプ、3つの第1種放物型エンドをもつタイプ)に分けられるが、それぞれの場合について、そのモデュライ空間を決定した。得られた結果について、現在論文を1本執筆中である。

- ③ ミンコフスキー空間内の極大面で完備かつ任意の種数を持ち、2つのエンドをもつ例を構成した。この曲面は、Y. W. Kim氏、S.-D. Yang氏によって発見された種数1の極大面の一般化である。種数が偶数のときは、その半分の種数の極大面の2重被覆になることも証明した。また、極大面をCMC-1 faceに変形する理論を開発し、これを用いて上述の極大面をCMC-1 faceに変形することに成功した。この結果について、現在論文を1本執筆中である。
- (2) 東京電機大学の國分雅敏氏、Wayne Rossman氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏との共同研究で、3次元光錐内の空間的曲面に関する研究を起ち上げた。この研究は現在も継続中である。
- (3) 佐賀大学の庄田敏宏氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間内の代数的極小曲面で2つのエンドをもつ例を構成した。この例は、1個または偶数個の種数を持ち、懸垂面を除く2つのエンドをもつ極小曲面の中で、オッサーマン不等式の最良の評価を与えている。また、ビョーリング問題と呼ばれる問題の観点からも興味深い例である。得られた結果について、日本数学会2008年度年会で講演を行った。京都大学数理解析研究所講究録に論文が掲載された。また、現在庄田氏との共著で論文を1本執筆中である。奇数個の種数を持ち、2つのエンドを持ち極小曲面についても、オッサーマン不等式の最良の評価を与える例の存在を、インディアナ大学のMatthias Weber氏はコンピュータによる数値解析で示唆しているが、このような曲面の存在について数学的な証明はまだできていない。このことについては現在も研究が継続中である。
- (4) インディアナ大学のMatthias Weber氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間内の3重周期をもつ極小曲面に関する研究を行った。曲面のガウス写像をヤコビのデータ関数で記述することで、古典的な例を周期問題を考えずに構成することができ、また周期問題を考えることで新たな例も構成することができた。周期問題は、extremal length argumentと呼ばれる理論を用いることで、具体的に解くことができた。得られた極小曲面は全て

等長的でない1径数族を持ち、また全ての曲面は自己交叉をもっていないことも証明した。この結果に関して論文を1本執筆した。この論文は、学術誌

Manuscripta Mathematicaに掲載された。

- (5) グラナダ大学 Francisco J. Lopez氏との共同研究で、3次元ミンコフスキー空間内の向き付け不可能な極大面とその特異点に関する研究を行った。3次元ユークリッド空間内の向き付け不可能な極小曲面についてはいくつか先行した結果があるが、向き付け不可能な極大面はこれまで知られていなかった。このような曲面は、ガウス写像の写像度が必ず偶数になるという著しい性質をもつことを証明し(極小曲面の場合は、コンパクト化した向き付け不可能曲面のオイラー数と、ガウス写像の写像度は偶奇が一致することが知られている)、このことを用いてガウス写像の写像度が小さい場合の曲面の分類を行った。メビウスの帯と同相な極大面や、クラインの壺から1点を除いたものと同相な極大面の具体例も構成した。この結果に関して論文を1本執筆した。この論文は現在投稿中である。
- (6) Wayne Rossman氏との共同研究で、3次元双曲空間内の平均曲率1をもつ曲面に関する研究を行った。Rossman氏と佐藤勝憲氏によって得られていた2つのエンドをもつ種数1の例を改良して、任意の種数で2つのエンドをもつ曲面が存在することを示唆し、実際に種数が20以下の曲面をコンピュータによる数値解析を用いて構成した。また、同様の方法で、3次元ド・ジッター空間内のCMC-1 faceも構成した。ここで得られた曲面は、全てオッサーマン不等式の等号を満たす。また、このような曲面は3次元ユークリッド空間内の極小曲面としては存在しないことが知られており、従ってRossman氏、梅原氏、山田氏による曲面の変形理論が使えず、最初から双曲空間やド・ジッター空間内の曲面として構成する必要がある。双曲空間やド・ジッター空間は、空間自体が曲がっているため、ユークリッド空間やミンコフスキー空間内の曲面に比べて周期問題を解決するのが困難である。この研究で得られた曲面も、数学的に存在を証明することができなかったのは、このことが原因の1つである。この結果に関して論文を1本執筆した。この論文は現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕（計 2 件）

- ① Shoichi Fujimori and Matthias Weber,
Triply periodic minimal surfaces
bounded by vertical symmetry planes,
Manuscripta Mathematica (査読有), 129
(2009), 29-53.
- ② 藤森 祥一, 2 つのエンドをもつ極小曲
面の全曲率について, 京都大学数理解析
研究所講究録 (査読無), 1623 (2009),
76-88.

〔学会発表〕（計 1 件）

- ① 藤森 祥一, 庄田 敏宏, 2 つのエンド
をもつ 3 次元Euclid空間内の極小曲面に
ついて, 日本数学会 2008 年度年会, 2008
年 3 月 23 日, 近畿大学.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤森 祥一 (FUJIMORI SHOICHI)
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号 : 00452706

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし