様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年４月１日現在

研究種目：若手研究(スタートアップ)
研究期間：２００７～２００８
課題番号：１９８４００３６
研究課題名（和文）非線形分散型方程式の解の長時間挙動について

研究課題名（英文）Asymptotic behavior of solutions to nonlinear dispersive equations

研究代表者
瀬片　純市（SEGATA JUN-ICHI）
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：90432822

研究成果の概要：本研究では流体中の渦糸運動といった，物理学，工学に現れる非線形偏微分方程式の解の振る舞いを調べることを通して，流体運動の数学的理論の構築を試みた．具体的には，軸対称な渦糸の運動を近似する非線形偏微分方程式の解の長時間挙動をフーリエ解析といった数学の手法を用いて解析した．更にこの方程式よりも，より渦糸の運動を高次近似している非線形偏微分方程式の解の長時間挙動についても調べた．この方程式は非線形性が強いため解析が難しいが，本研究では特殊解の構成，線形化方程式の解析により解の挙動についてのいくつかの見通しを与えることができた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	1,080,000	324,000	1,404,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,980,000	324,000	2,304,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：関数方程式論，数理物理学，漸近解析，調和解析，流体

１．研究開始当初の背景

本研究では水面波の動きや渦糸の運動を近似する偏微分方程式の解の長時間挙動について考えた．これらの方程式は主に1次元非線形分散型方程式であるが，典型的な例としては，非線形Schrödinger方程式，一般化Korteweg-de Vries方程式などがある．非線形Schrödinger方程式，一般化Korteweg-de Vries方程式の解が，時間が経つにつれ減衰すると仮定すると，非線形項の冪が大きいときは時間が経つにつれ非線形項の影響が小さくなり，非線形Schrödinger方程式，一般化

Korteweg-de Vries方程式の解はその線形化方程式の解に近づくと考えられる．逆に非線形項の冪が小さいときは非線形項の減衰が悪く，これらの方程式の解は線形化方程式の解と異なる挙動を示すと考えられる．前者の場合を短距離型，後者の場合を長距離型ということにすると，非線形項の冪が3より大ならば短距離型，3以下ならば長距離型になることが知られている．物理学に現れる多くの方程式は長距離型に属する．実際，渦糸の運動を記述する方程式は3次の非線形項を持つ非線形Schrödinger方程式であり，水面波の動きを表す，いわゆるKorteweg-de Vries方程式,プラズマ物理学に現れる変形Korteweg-de Vries方程式はそれぞれ2次および3次非線形項を持つKorteweg-de Vries型方程式でありこれらはすべて長距離型となる．しかしながら，非線形項の時間減衰が悪いために長距離型方程式の解の漸近挙動を調べることは難しい.

長距離型非線形項を持つ非線形分散型方程式の解の漸近挙動については，小澤徹氏(1991年)により初めて手法が確立された．小澤氏の論文では3次の非線形項を持つ非線形Schrödinger方程式について解の漸近挙動を得た．その後，林-Naumkin氏(1998年)により変形Korteweg-de Vries方程式に対し解の漸近形が得られた．このように長距離型相互作用を持つ非線形分散型方程式の研究は日本人の寄与が大きい．またGinibre-VeloによりMaxwell-Schrödinger方程式系といった長距離型の非線形項を持つ連立系に対して，長距離散乱理論が構築されるなど海外ではフランスを中心に関連した研究がなされている.

２．研究の目的

本研究では主に渦糸運動の高次近似モデルとして現れる高階Schrödinger型方程式，水面波の動きを近似する非線形分散型方程式の解の漸近挙動について研究する．方程式の構造から，渦糸運動の高次近似モデル及び水面波の動きを近似する非線形分散型方程式はどちらも長距離型方程式に属する．長距離型の分散型方程式の解の挙動の研究に関しては，研究開始当初の背景でも述べたように小澤徹氏，林-Naumkin氏の一連の論文などでいくつかの手法が確立されている．彼らの方法は線形化方程式の解の構造を巧みに利用することにより解の漸近挙動を調べている．そのため線形化方程式の解析が重要なポイントの一つとなる．しかしながら，高階の非線形分散型方程式のように，線形化方程式の解の情報を得ることが困難な場合，彼らの方法を直接適用することが困難であり，さらなる工夫を要する．そこで研究代表者は，停留位相法といった振動積分の理論を非線形方程式に応用することにより，ある高階の分散型方程式に対して解の漸近挙動を捉えることが出来た．本研究ではこの手法を利用，発展させることにより非線形分散型方程式の解の挙動を研究する．またこれらの方程式は非線形分散型方程式特有の解である孤立波解を持つ．既存の研究では分散性の影響のみあるいは孤立波の影響のみを考えた解の長時間挙動の研究が多い.本研究ではまず，分散性の影響を考慮した解の長時間挙動の研究を行う．その後，分散性だけでなく孤立波の影響も考慮した長時間挙動の研究を試みる.

３．研究の方法

(1) 本研究の第1段階として3階Korteweg-de Vries型方程式(広田方程式) の解の漸近挙動について研究する．この方程式はさまざまな物理現象を記述するモデルとして現れる．例えば，軸対称な渦糸運動を高次近似するモデルとして福本-宮嵜(1991年)によりこの方程

式が提唱された．方程式中のパラメータを0とすると渦糸運動の1次近似モデルとして現れるDa Riosモデル(3次の非線形を持つ非線形Schrödinger方程式）となる．この方程式を停留位相法といった振動積分の理論を用いることにより解の長時間挙動の解析を試みる．

(2) 本研究の次のステップとして，渦糸運動の高次近似モデルとして現れる4階非線形Schrödinger型方程式の解の漸近挙動について研究を行う．この方程式の非線形項は未知関数とその1階および2階導関数に依存する3次の非線形項である．この方程式は局所ひずみ場による渦核断面の変形を考慮したモデルとして福本-Moffatt(2000年)により提唱された．4階非線形Schrödinger型方程式は3階Korteweg-de Vries型方程式よりもさらに渦糸運動を高次近似しているため，4階非線形Schrödinger型方程式を解析することはより現実的な渦糸運動につながると思われる．しかしながら方程式の構造がより複雑になるため，数学的な解析が困難になる．そこで(1)で用いた停留位相法にさらに非線形常微分方程式の理論，擬微分作用素の理論を組み合わせることにより解析を行なう．

４．研究成果

(1) 軸対称な渦糸運動を高次近似する３階Korteweg-de Vries型方程式(広田方程式）の解の漸近挙動についての解析を行なった．
研究代表者はまず，Korteweg-de Vries型方程式の線形化方程式の解に関するいくつかの漸近公式を用いることによりKorteweg-de Vries型方程式の解の漸近挙動を調べることができた．この結果については論文([雑誌論文]①)としてまとめた．その後，未知関数をうまく変数変換することによりこのKorteweg-de Vries型方程式が複素数に値をとる関数に対する変形Korteweg-de Vries方程式に帰着できることがわかった．この変数変換により，先の証明方法よりも簡単な証明を与えることができた．

(2)渦糸運動の高次近似モデルとして福本-Moffattにより提唱された４階非線形Schrödinger 型方程式について研究を行った．具体的には４階非線形Schrödinger型方程式の①解の存在と一意性について，②定在波解の具体的な形状について，③線形化方程式の挙動について，という３つの問題に取り組んだ．

①(4階非線形Schrödinger型方程式の解の存在と一意性)現象から導かれた微分方程式が解を持つか? また微分方程式の解が存在するとき，ある初期条件の下で解が唯一つに定まるか?という問題は方程式を研究する上で最も基本的な問題である．４階非線形Schrödinger型方程式の解の存在と一意性についてはいくつかの既存の結果があるが，それらの証明は煩雑であった．そこでわれわれは，Christ-Kiselevにより証明されたある調和解析の定理を用いることにより，既存の結果よりも見通しのよい証明を与えた．

②(4階非線形Schrödinger型方程式の定在波解の形状について)微分方程式の解の長時間挙動を調べることは数学的に興味深いだけでなく物理学的にも重要である．しかしながら４階非線形Schrödinger型方程式は方程式自体がかなり複雑なため，その解の長時間挙動を調べるのは容易ではない．われわれは４階非線形Schrödinger型方程式の解の長時間挙動を調べる一つのアプローチとして，４階非線形Schrödinger型方程式の特殊

解，特に定在波解について研究を行った.

われわれは福本-Moffatt のモデルが非線形 Schrödinger 方程式の高次近似モデルであるという事実からそれらの定在波解の形は類似しているであろうと予測し，4 階非線形 Schrödinger 型方程式の定在波解の具体的な構成を試みた. その結果，福本-Moffatt のモデルが完全可積分となる，ある特別な場合には，非線形 Schrödinger 方程式に類似した定在波解を見つけることが出来た.

③(4 階非線形 Schrödinger 型方程式の線形化方程式の解の挙動について）これまでは線形項が未知関数の時間 1 階偏導関数と空間 4 階偏導関数からなる場合の線形分散型方程式の解の性質を調べてきたが，本研究では上記の線形方程式にさらに空間 2 階偏導関数が加わった場合の線形分散型方程式の解の長時間挙動の解析を行なった. この方程式は 3 次元非圧縮非粘性流体中の渦糸運動の高次近似モデルを解析する際に現れる. この方程式を解析する場合，空間 4 階偏導関数の項と 2 階偏導関数の項がどのように影響を及ぼしあうか?ということを調べる必要があるが，われわれは解の表示式で現れる振動積分の停留点の近くの挙動を詳しく解析することによりこの方程式の解の長時間挙動を得ることができた.

今年度得られた線形化方程式の解に対する漸近公式を用いることにより，4 階非線形 Schrödinger 型方程式の解の漸近形を形式的に求めることができた. しかしながらこの結果を数学的に正当化するためには非線形項に含まれる微分項の処理をしなければならない. 今後はこの問題の解決方法を模索し 4 階非線形 Schrödinger 型方程式の解の長時間挙動に対する数学的理論を構築していきたい.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Segata Jun-ichi
On asymptotic behavior of solutions to Korteweg-de Vries type equations related to vortex filament with axial flow.
Journal of Differential Equations.
Vol.245, No.2, 281-306
(2008) 査読有

② Segata Jun-ichi
On asymptotic behavior of solutions to the fourth order cubic nonlinear Schrödinger type equation.
Asmptotic Analysis and singularities -hyperbolic and dispersive PDEs and fluid mechanics, Advanced Studies Pure Mathematics.
Vol.47, No.1, 329-339
(2007) 査読有

③ Segata Jun-ichi, Shimomura Akihiro,
Global existence and asymptotic behavior of solutions to the fourth order nonlinear Schrödinger type equation.
Communications in Applied Analysis.
Vol.11. No.2, 169-188
(2007) 査読有

〔その他〕講演（計４件）

① Segata Jun-ichi,
Final state problem for some KdV type equation.
京都大学数理解析研究所研究集会 調和解析学と非線形偏微分方程式（Workshop

on Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations).
2007年 7/9-7/11 京都大学数理解析研究所 京都市.

② 瀬片純市,
非線形 Schrödinger 方程式の長距離散乱理論について.
スプリングスクール 2008 サーベイレクチャーシリーズ ～非線形の数学解析～.
2008年 2/14-2/16 東北大学 仙台市.

③ Segata Jun-ichi,
On higher order nonlinear Schrödinger type equation.
National Chiao Tung University conference.
2008年 3/18 National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan.

④ Segata Jun-ichi,
On higher order nonlinear Schrödinger type equation.
Academia Sinica Analysis Seminar.
2008年 3/24 Academia Sinica, Taipei, Taiwan.

６．研究組織
(1)研究代表者
瀬片　純市 (SEGATA JUN-ICHI)
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：90432822

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし