

## 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 1 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2007～2008

課題番号：19840037

研究課題名（和文） 非有界領域における圧縮性粘性流体の時間漸近挙動に関する研究

研究課題名（英文） Large-time behavior of motion for compressible viscous fluid in unbounded domain

研究代表者

中村 徹（NAKAMURA TOHRU）

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号：90432898

**研究成果の概要：**本研究では、圧縮性粘性流体のモデル方程式として知られる圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間漸近挙動に関する研究を行った。具体的には、1次元及び多次元半空間領域における等エントロピーモデルに対する流出 (Outflow) 問題を考察し、解の定常解への漸近率の算出に成功した。本研究で得られた漸近率は、松村・川島・西原等による単独粘性保存則に対する結果を鑑みると、ほぼ最適であると予想される。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,170,000	0	1,170,000
2008 年度	1,220,000	366,000	1,586,000
総計	2,390,000	366,000	2,756,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学，関数方程式，圧縮性流体，漸近解析，エネルギー法，粘性保存則，境界層解

## 1. 研究開始当初の背景

圧縮性粘性流体の運動を記述する方程式系のうち、1次元半空間における等エントロピーモデルでの初期境界値問題については、解の境界値と無限遠方での値に応じて 20 通り以上の様々な解の漸近状態が現れることが松村昭孝氏によって予想されている（関連結果 [A5]）。このうち大部分の問題に対しては数学的に厳密な証明は与えられておらず、現在までのところ部分的な結果しか得られていない。例えば流速の境界値が負の定数とな

る Outflow 問題に対しては川島秀一氏・西畑伸也氏及び P.Zhu 氏等により研究されており ([A3])、漸近形が定常解で与えられる場合には、無限遠方における流速が超音速または音速となる場合に限り、定常解が漸近安定であることが示されている。なおこの安定性定理では、初期摂動の Sobolev ノルムと定常解の大きさに十分小さいという仮定が要求されている。この安定性における漸近率は算出されていなかったが、対応する非粘性双曲型方程式系の特性速度は全て負となることから、松

村・川島・西原氏等の単独粘性保存則に対する結果 ([A2], [A7]) を応用することにより, 本問題に対しても漸近率の算出が期待されていた.

空間多次元上の初期値問題に対しては, 3次元全空間領域における熱伝導圧縮性粘性流体の時間漸近挙動が松村氏によって考察され ([A4]), 定数解への時間漸近率が求められている. この結果は方程式系の放物性を利用することにより算出されており, 熱方程式との比較を考慮すると最良の漸近率である. 多次元半空間上の初期値・境界値問題については, 定数解への減衰率などの結果はいくつか知られている一方, 非線形波の安定性に関しては, 松村・西田氏等によるポテンシャル外力に起因する定常解の漸近安定性 ([A6]), 隠居・川島氏等による Outflow 問題に対する平面境界層解の漸近安定性 ([A1]) などの結果が知られているが, いずれも漸近率の導出には至っていなかった.

[関連結果]

- [A1] Y. Kagei and S. Kawashima, *Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 2, 401–430.
- [A2] S. Kawashima and A. Matsumura, *Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion*, Comm. Math. Phys. **101** (1985), no. 1, 97–127.
- [A3] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 3, 483–500.
- [A4] A. Matsumura, *An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, University of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Report #2194 (1981), 1–16.
- [A5] A. Matsumura, *Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), no. 4, 645–666.
- [A6] A. Matsumura and T. Nishida, *Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 4, 445–464.
- [A7] A. Matsumura and K. Nishihara, *Asymptotic stability of traveling waves for scalar viscous conservation laws with non-convex nonlinearity*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 1, 83–96.

## 2. 研究の目的

(1) **1次元半空間上の問題** 本研究の第一の目的は1次元半空間上における圧縮性粘性流体の等エントロピーモデルに対し, Outflow 問題における定常解への漸近率の算出である. 本モデルと関連する単独粘性保存則に対する先行結果では, 縮退する定常解への漸近率には上限があった ([A7]). よって本モデルに対しても, 定常解が縮退する音速流の場合には漸近率の上限値が存在することが予想される為, その上限値が最良であるかどうか合わせて検証する.

(2) **多次元半空間への拡張** 本研究第二の目的は(1)で得られた結果を多次元半空間上に拡張することである. 多次元上の問題については「1. 研究開始当初の背景」で述べた通り, 隠居・川島氏等によって平面境界層解の漸近安定性が示されている. そこで本研究では(1)での計算手法を応用し, 多次元半空間での漸近率の算出を試みる.

## 3. 研究の方法

(1) **1次元半空間上の問題** まず1次元半空間上における等エントロピーモデルの Outflow 問題に対し, 川島・西畑・Zhu等によって示された定常解の存在性及び漸近安定性を踏まえ, その漸近率を算出した. 松村・川島・西原等は単独粘性保存則に対し, 重み付きエネルギー法と数学的帰納法を組み合わせることにより, 粘性衝撃波への漸近率を算出しており, 本研究でもこの手法を採用した. 具体的には方程式系を定常解からの摂動問題に書き換え, Sobolev 空間  $H^1$  における摂動の一樣なアприオリ評価を導出し, さらに放物型に対する Schauder 評価を利用することにより解の Hölder 空間におけるアприオリ評価を求めた. これにより時間大域的な古典解の存在が示される. そしてさらに初期摂動に重み付き Sobolev 空間に属することを仮定し, 時空間重み付きエネルギー法を用いて摂動の重み付き評価を導出した. この評価と前述の  $H^1$  アприオリ評価を組み合わせ, さらに帰納法を用いることにより定常解への漸近率を算出した.

(2) **多次元半空間への拡張** 続いて(1)で得られた結果の多次元半空間への拡張を行った. 具体的には, 隠居・川島氏等の平面定常波の安定性定理に対し, 空間2及び3次元の場合にその漸近率を算出した. 手法は主に時空間重み付きエネルギー

法によるが、初期摂動には境界面に対し法線方向のみ重みの付いた Sobolev 空間に属することを仮定するのが特徴的である。これにより 1 次元の場合と同様、空間減衰率に応じた時間漸近率を算出した。さらに運動量保存則に対応する方程式が放物型であることを踏まえ、空間次元に応じた粘性効果による漸近率も合わせて導出した。具体的には、摂動の接方向偏導関数に対し時間重み付きエネルギー法を適用し、粘性による消散効果と数学的帰納法を組み合わせ導出している。

#### 4. 研究成果

(1) 1 次元半空間における定常解への漸近率 空間 1 次元半空間上の等エントロピーモデル及び関連する単独粘性保存則・非線形移流項付き消散型波動方程式に対し、定常解への漸近率を算出した。等エントロピーモデルに対する結果は主に論文 [B4], [B6], [B7] に掲載され、論文 [B1] では特に縮退定常波への精密な漸近率について論じている。無限遠方において超音速流となる場合は、空間減衰率に応じた指数的または代数的漸近率を算出することが出来た。その際初期摂動には  $H^1$  ノルムが十分小さいことと、重み付き  $L^2$  空間に属することが要求される。一方、無限遠方において音速流となる場合は、その縮退性により初期摂動には重み付きの  $H^1$  ノルムが十分小さいという強い仮定が要求される。その上で代数的な漸近率しか求めることが出来ず、その値は超音速の場合に対して半分の速さとなる。さらにその漸近率には上限値  $O(t^{-(1+\sqrt{2})/2})$  があり、関連する単独粘性保存則及び消散型波動方程式においても、同じ上限値が現れることが判明した。なお本研究で得られた空間 1 次元での結果は、松村・川島・西原等による単独粘性保存則に対する粘性衝撃波への漸近率と比較して、ほぼ最適であると考えられる。

(2) 多次元半空間における平面定常解への漸近率 空間多次元半空間上の等エントロピーモデルに対しては、空間 2 及び 3 次元の場合に平面定常波への漸近率を算出した。本結果をまとめた論文は現在投稿中であるが、講演論文 [B6] には本結果の要約が記載されている。本結果で得られた漸近率を算出する為には、平面定常波からの初期摂動に対して適当な Sobolev 空間に属することのみならず、境界面の法線方向への減衰を仮定する必要がある。この減衰の早さに応じた代数的な時間漸近

率と、さらに境界面の接方向の空間次元に応じた粘性効果による代数的時間減衰率を組み合わせた漸近率が算出された。この二つの減衰率を組み合わせる為には、空間重み指数、時間重み指数、さらに接方向の微分回数という三つの要素が現れる中で帰納法を適用するという高度な計算を行う必要があり、本研究と通じて新しい計算手法が確立したと言える。音速定常波への漸近率についてはやはりその縮退性により、1 次元の場合と同様に漸近率には上限値が認められた。なお本問題と関連して、多次元半空間における消散型波動方程式に対しても、法線方向の空間減衰率と、接方向の空間次元に応じた消散的減衰率を合わせた形で、平面定常波への時間漸近率の算出に成功している。この結果は論文 [B2] にまとめられている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

[B1] Y.Ueda, T.Nakamura and S.Kawashima, *Stability of degenerate stationary waves for viscous gases*, to appear in *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 査読有り。

[B2] Y.Ueda, T.Nakamura and S.Kawashima, *Stability of planar stationary waves for damped wave equations with nonlinear convection in multi-dimensional half space*, *Kinetic and Related Models*, **1** (2008), no.1, 49–64, 査読有り。

[B3] T.Nakamura and S.Nishibata, *Large-time behavior of spherically symmetric flow of heat-conductive gas in a field of potential forces*, *Indiana Univ. Math. J.*, **57** (2008), no.2, 1019–1054, 査読有り。

[B4] T.Nakamura, S.Nishibata and T.Yuge, *Convergence rate of solutions toward stationary solutions to the compressible Navier–Stokes equation in a half line*, *J. Differential Equations*, **241** (2007), no.1, 94–111, 査読有り。

[B5] T.Nakamura and S.Nishibata, *Asymptotic behavior of spherically symmetric flow for viscous heat-conductive gas*, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, (2007) 451–459, 査読

有り.

[B6] T.Nakamura and S.Nishibata, *Half space problem for the compressible Navier–Stokes equation*, to appear in Proceedings of Hyp2008, 査読有り.

[B7] T.Nakamura, S.Nishibata and T.Yuge, *Large-time behavior of solutions for the compressible viscous fluid in a half space*, 京都大学数理解析研究所講究録, **1536** (2007), 122–131, 査読無し.

[学会発表] (計 13 件)

[C1] T.Nakamura, *Stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space*, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 東京工業大学, 2009 年 3 月 28 日.

[C2] 中村 徹, 1次元半空間における熱伝導圧縮性粘性流体の定常波について, 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会, 名古屋大学, 2009 年 3 月 10 日.

[C3] T.Nakamura, *Stationary wave for compressible viscous and heat-conductive fluid in half space*, 第 26 回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学, 2009 年 1 月 28 日.

[C4] 中村 徹, 圧縮性 Navier–Stokes 方程式に対する定常解の安定性解析, 第 3 回奈良偏微分方程式研究会, 奈良女子大学, 2008 年 12 月 13 日.

[C5] T.Nakamura, *Existence and stability of stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space*, First China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, 2008 年 11 月 11 日.

[C6] 中村 徹, 1次元半空間における圧縮性粘性流体の理想気体モデルの解の時間漸近挙動, 偏微分方程式の諸問題, 東海大学, 2008 年 11 月 1 日.

[C7] 中村 徹, 西畑 伸也, 川島 秀一, P.C.Zhu, 半直線上の熱伝導圧縮性粘性流体の定常解について, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008 年 9 月 26 日.

[C8] T.Nakamura, *Large time behavior of solutions to viscous heat-conductive gases in half space*, 12th International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, University of Maryland, College Park, U.S.A., 2008 年 6 月 10 日.

[C9] 中村 徹, *Asymptotic stability of stationary waves for compressible viscous fluid in half space*, 偏微分方程式待兼山セミナー No.16, 大阪大学, 2008 年 2 月 5 日.

[C10] T.Nakamura, *Asymptotic behavior of solutions for compressible viscous fluid in half space*, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 京都大学, 2008 年 1 月 22 日.

[C11] 中村 徹, *Stability of stationary waves for compressible viscous fluid in multi-dimensional half space*, 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会, 名古屋大学, 2008 年 1 月 6 日.

[C12] 中村 徹, 西畑 伸也, 多次元半空間における圧縮性粘性流体の縮退定常波の漸近安定性, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学, 2007 年 9 月 23 日.

[C13] T.Nakamura, *Half space problem for the compressible Navier–Stokes equation*, 第三回流体と保存則の研究集会, 東京工業大学, 2007 年 9 月 13 日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 徹 (NAKAMURA TOHRU)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号 : 90432898