

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19H00640

研究課題名（和文）作用素環論の総合的展開

研究課題名（英文）Integral development of theory of operator algebras

研究代表者

河東 泰之（Kawahigashi, Yasuyuki）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90214684

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 34,900,000円

研究成果の概要（和文）：2次元トポロジカル秩序の研究に現れる4-テンソルと、作用素環論に現れる部分因子環の双ユニタリ接続との関係を明らかにした。特に、Bultinck-Mariena-Williamson-Sahinoglu-Haegeman-Verstraete の論文に現れる4-テンソルは、部分因子環論における、平坦とは限らない双ユニタリ接続と本質的に同じものであることを示した。さらに、そのような双ユニタリ接続と量子6jシンボルの一般化との関係、この設定における誘導の記述、物理学の論文に現れる行列積作用素射影子の値域についての、作用素環論的記述などを与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元トポロジカル物性物理学における最新の研究対象と、作用素環論、特にJonesの部分因子環論において1990年代から研究されていた対象が、本質的に同じものであることが明らかになり、作用素環論の新しい応用面が大きく切り開かれた。これによって、物性物理学に現れる数学的問題の理解が深く前進した。また、このようなトポロジカル物性物理学の視点から、作用素環論についての新しい問題意識が生まれ、作用素環論、特に部分因子環論における古い研究テーマについてこれまで見逃されていた問題がいくつも明らかになり、これらについて新しい解答が得られた。

研究成果の概要（英文）：We studied relations between 4-tensors appearing in 2-dimensional topological order and bi-unitary connections in subfactor theory in operator algebras. In particular, we proved that the 4-tensors in the work of Bultinck-Mariena-Williamson-Sahinoglu-Haegeman-Verstraete are essentially the same as (not-necessarily-flat) bi-unitary connections in subfactor theory. We clarified relations between such bi-unitary connections and generalized quantum 6j-symbols. We described alpha-induction in this setting, and gave an operator algebraic description of the range of the projector matrix product operators appearing in physics literature.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環論 誘導 テンソル圏 フュージョン圏 部分因子環 共形場理論 トポロジカル相 双ユニタリ接続

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

2次元共形場理論を記述する方法の一つに、代数的場の量子論、すなわち作用素環のネットを用いる方法があること、その表現論から自然にテンソル圏が現れることはよくわかっていた。また、2次元共形場理論を記述する別の数学的方法である頂点作用素代数との関連も、2018年の Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner の論文を出発点として、理解が始まりかけていた。この流れで数学的にもっとも重要となるのは Jones の部分因子環論である。

一方、トポロジカル物性物理学における2次元トポロジカル秩序の研究において、部分因子環論とよく似た数学的構造が現れることが発見されていた。テンソル圏の理論が、部分因子環論と2次元トポロジカル秩序の両方に関係していることは広く知られていたが、ここに現れる類似がそれ以上のものなのか、また数理物理学、コンピュータ科学で広く使われるテンソル・ネットワークがそこでどのような役割を果たすのかについてはよくわかっていなかった。

そこでこれらの幅広い理論の間の相互関係をきちんと理解し、互いの応用を目指すことが求められていた。

2. 研究の目的

2次元トポロジカル秩序の関係に現れる4-テンソルからなるテンソル・ネットワーク、行列積作用素などの働きを作用素環論、特に部分因子環論の立場から数学的に理解すること、作用素環論で得られた知見をこれらの問題に応用すること、また逆にトポロジカル物性物理学の立場から作用素環論の数学的問題を考察することが目的である。

3. 研究の方法

部分因子環論における双ユニタリ接続と2次元トポロジカル秩序の関係に現れる4-テンソルの関係を調べることに、そこにおける双ユニタリ接続の平坦性の果たす役割を調べることに、また量子群の理論における量子 $6j$ シンボルとの関係を調べることに、3次元位相的場の量子論との関係をもとに考察すること、組紐テンソル圏における誘導の方法を応用することが基本的な手法である。

4. 研究成果

Bultinck-Mariena-Williamson-Sahinoglu-Haegeman-Verstraete の最近の結果の数学的構造と、部分因子環論における対称双ユニタリ平坦接続およびチューブ代数の数学的構造が同一であることを証明した。より詳しくは、有限指数、深さ有限の部分因子環から生じる対称双ユニタリ平坦接続が、彼らの扱っているテンソルのすべての条件を満たすこと及び、それから生じるチューブ代数と彼らのテンソルから生じるエニオン代数が同型であることを示した。

Bultinck-Marien-Williamson-Sahinoglu-Haegeman-Verstraete らの2次元トポロジカル秩序における4-tensor から生じる projector matrix product operator について、長さ k のこの射影作用素の値域が、双ユニタリ接続の生み出す部分因子環の次の higher relative commutant に一致することを示した。

Jones の基礎構成を繰り返すことによって深さ有限の II_1 型部分因子環を生み出すような有限次元 C^* 環の commuting square の特徴づけを、森田同値なユニタリ・フュージョン圏の言葉を用いて与えた。この種の commuting square は佐藤によって研究されたもので、彼の構成

をわずかに一般化したものが完全に一般的なそのような commuting square を与えていることを示した .

組紐フュージョン圏上の 誘導について , 双ユニタリ接続の立場から研究を行い , 双ユニタリ接続によって記述された組紐フュージョン圏上で 誘導がどのように記述されるかを明らかにした . その中で , Frobenius 代数が可換 (局所的) である場合には , 誘導によって生じる双ユニタリ接続が平坦になることを証明し , さらにこの主張の逆も成り立つことを証明した .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Evans David, Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 60
2. 論文標題 Subfactors and mathematical physics	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bulletin of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 459 ~ 482
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bull/1799	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Kawahigashi	4. 巻 2023
2. 論文標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Internat. Math. Res. Notices	6. 最初と最後の頁 8419-8433
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 387
2. 論文標題 Projector matrix product operators, anyons and higher relative commutants of subfactors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 2157 ~ 2172
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-022-02519-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 35
2. 論文標題 Two-dimensional topological order and operator algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Modern Physics B	6. 最初と最後の頁 2130003 ~ 2130003
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0217979221300036	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 -
2. 論文標題 \$¥alpha\$-induction for bi-unitary connections	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/209	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 110
2. 論文標題 A remark on matrix product operator algebras, anyons and subfactors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1113 ~ 1122
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-020-01254-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Operator Algebras: Subfactors, K-theory, Conformal Field Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Operator Theory 28 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 New Frontiers: Interactions between Quantum Physics and Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Topological Quantum Groups, C*-Tensor Categories, and Subfactors (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 Mathematics of topological phases of matter and operator algebras
3. 学会等名 Pan-Pacific Workshop on Topology and Correlation in Exotic Materials (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 Topological order, tensor networks and subfactors
3. 学会等名 Topological Orders and Higher Structures (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 Topological order, tensor networks and operator algebras
3. 学会等名 Quantum Math, Singularities and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Y. Kawahigashi
2. 発表標題 Connections, subfactors and tensor networks
3. 学会等名 Fusion categories and tensor networks (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

河東泰之のページ https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------