

令和 6 年 9 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01782

研究課題名（和文）ループ空間の幾何学と表現論

研究課題名（英文）Geometry of loop spaces and representation theory

研究代表者

加藤 周 (Kato, Syu)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：40456760

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,200,000円

研究成果の概要（和文）：半無限旗多様体の幾何学に関する基礎理論を確立し、それにより通常の旗多様体に関する教科書やレクチャーノートに載っているような性質の大きな部分をこの構造物について証明した。また、その過程で半無限旗多様体の幾何学的構造とアフィン・リー代数の表現論的構造の間の深い関係を見出し、それにより何故半無限旗多様体とは何であって、なぜそこに良い性質を期待できるのかを表現論的に明確にした。さらに半無限旗多様体のK群と旗多様体の量子K群やアフィン・グラスマン多様体のK群との関係を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義は半無限旗多様体およびその部分多様体の構造がどのようなものであるかを明確に描き出したこと、およびそれにより半無限旗多様体と旗多様体のループ空間、そして旗多様体への射影直線からの写像の空間の構造との関係を明確化したことにある。これにより表現論分野を超えて意味を持つ新しい対象を提出したと言える。特にその応用として量子K群における重要な予想をいくつか解決した。

研究成果の概要（英文）：We have established basic theory of semi-infinite flag manifolds, that contains a major portion of standard results known in the setting of usual flag manifolds. During this process, we have spelled out deep relationship between representation theory of affine Lie algebras, that enables us to tell what the semi-infinite flag manifolds is and why one can expect nice properties about them. In addition, we have established the relation among the K-group of semi-infinite flag manifolds, the quantum K-group of flag manifolds, and the K-group of affine Grassmannians.

研究分野：数学

キーワード：半無限旗多様体 半無限Schubert多様体 半無限Richardson多様体 大域Weyl加群 量子K群 アフィン・グラスマン多様体 旗空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

半無限旗多様体は1980年ごろにはそのような構造物が存在することが Lusztig らにより集合論的には認知されていた。ただ、Lusztig 自身はそのような構造を幾何学的に深めることは行わず、代わりに集合論的考察からくる組み合わせ論をいわゆる Lusztig 予想の構成因子として提示するに留まっていた。また、1990年ごろには Feigin-Frenkel などによりその代数幾何学的構造の一部を使って頂点作用素代数における帰結が議論されていたが、これはある意味でモチベーションとして使っているようなところがあって必ずしも満足ゆく幾何学的構成を伴っているわけではなかった。この背景として半無限旗多様体はいわゆるアフィン・グラスマン多様体のように有限次元多様体の和として書かれる多様体と異なり純粋に無限次元の構造物であるため、それを具体的に記述するのが大変困難であるという基本的な問題が挙げられる。

ただし、その有限次元類似および Drinfeld のアイデアに基づく Finkelberg を中心とする研究の主張は非常に魅力的なものであった。実際1990年代後半の研究では半無限旗多様体の幾何学と量子群の表現論との強い関わりが Lusztig の提案とは少し異なる形で示唆されており、さらに2010年代の研究では旗多様体の量子  $K$  群の計算で基本的な量である ( $K$  理論的量子)  $J$  関数が半無限旗多様体の (アフィンな) 局所閉集合の座標環の指標として与えられることが示されていた。

このような状況のもとで研究代表者は半無限旗多様体に対して Finkelberg らによる先行研究を精密化するという形で Demazure 指標公式の類似物を確立したり、非対称 Macdonald 多項式との関係を発見(2018)したりするなどある程度組織的な研究を行っていた。

### 2. 研究の目的

半無限旗多様体とその構成を代数的ループ空間の研究や表現論的な考察などを用いて見直し、可能であればより大きな枠組みの中に位置付けることを目的とする。そのために特に半無限旗多様体の理論の出発点を有限次元近似に置かないようにして再解釈・再構成する。そのような再定式化によって半無限旗多様体自体に対する新しい結果や他の分野とのつながりを得るとともに半無限旗多様体を始めとする代数的ループ空間の幾何学に対するより深い知見を得る。また、その過程において幾何学的構造に対応するものやそれに近い表現論的な事実をより深く掘り下げることによってアフィン・リー代数の表現論をより深く理解することも目指す。

### 3. 研究の方法

まず、半無限旗多様体の座標環の構造を表現論的に解析する。それにより純粋に無限次元である半無限旗多様体の構造を非常に良い性質を持つ無限次元表現たちを単位として捉え直す。このような解釈を適切に用いることで半無限旗多様体の座標環があたかも通常の有限生成の代数であるかのように考察することを可能にする。その後、そのような考察と既存の結果を比較吟味することにより半無限旗多様体の幾何学において通常の旗多様体や(通常の意味での) Kac-Moody リー代数の旗多様体において得られていた各種の定理群の類似を証明する。さらにその構成や証明に出てくる各々の対象を解析してゆく中で新しいつながりを模索してゆく。

このような目的を実現するためにコンピュータなど必要な備品を整備するとともに関連図書を購入する。また、国内外への出張を行う、表現論セミナーへの参加者招聘を行う、国内外で研究集会を主催するなどといった活動を行ないさまざまな研究者と議論を深める。

### 4. 研究成果

まず、半無限旗多様体という対象物をより深く理解するという文脈では大きな成功を収めたと考えている。論文[Forum of Math. Pi (2021)]では我々の流儀によって定義した半無限旗多様体はそのループ空間としての定義を実現するような (ind) スキームのうちで適切な意味での普遍性を満たすものであり、その普遍性の由来はその座標環を記述する加群が適切な意味で表現論的に普遍的な性質を満たすものであるという事実から来していることを示した。またそもそもそのような表現論的な普遍性自体が体の標数が0の時にしか知られていなかったためこれを任意標数へと拡張するというのもこの仕事の中で付随して証明した。このような普遍性および対応する加群が量子ループ代数由来の大域基底を持つという事実から半無限旗多様体やその Schubert 部分多様体および Richardson 多様体が Frobenius 分裂することを示し、これらの多様体が正規でありかつその上の豊富な直線束の高次のコホモロジーが全て消えていることを証明した。これにより基本的に有限次元の旗多様体やその Richardson 部分多様体に対して証明されている基本的事実の大半に対してその半無限類似を証明することができた。この Frobenius 分裂性の証明は、元々違う文脈からくる興味で研究代表者が以前に証明していたいわゆる柏原のバージョンの Kac-Moody 旗多様体の Frobenius 分裂性(ただし、ここではアフィン・リー代数に対応する場合を考える)と[3]にあるようなアフィン・リー代数の可積分表現の構造がレベル0表

現の構造により強く統制されているというアイデアを混合したものとなっていて、非常に独自性の高いものとなっている。

また、論文[Comm. Math. Phys. (2019), Adv. Math. (2020), J. reine angew. Math. (2020)]においてはアフィン・リー代数のレベル0表現の構造は実際には最高ウェイト表現(このレベルは正になる)の構造を強く統制していることを示した。この事実は現状では純粋に表現論的な事実と数値的に他分野で興味を持たれている量(例えばフュージョン環の構造係数)を結びつけるというものであり興味深いという以上のことはないが、今後研究を進めてゆけば半無限旗多様体に関連する幾何学とも関係するのではないかと期待している。なお、論文という形にはなっていないものこれら一連研究をより深めてゆくことにより1990年代-2000年代に盛んに定義されたさまざまな意味で一般化されたコストカ多項式の多くがアフィン・リー代数の必ずしも既約ではないものの良い特徴づけを伴った加群族ということで理解できるはずであるという確信を得ることができた(ただしその詳細を追求することは次の研究計画の課題ということになる)。

先に述べたように[Forum of Math. Pi (2021)]においては半無限旗多様体のRichardson多様体という部分多様体を定義してその性質を詳しく調べているのであるが、その途中においてこのような多様体の特別な場合が射影直線から旗多様体への次数を固定した写像の空間の良いコンパクト化(Kontsevichコンパクト化)を用いた特異点解消を持つことを使って解析を行なった。この事実は旗多様体の半無限Richardson多様体は旗多様体の量子K群の計算に使うKontsevichコンパクト化の部分空間とほぼ同じであるというより強い事実を導いた。この事実をさらに深掘りすることにより半無限旗多様体のK群と旗多様体の量子K群は基本的に同型であるという事実を導いた。ここでの半無限旗多様体の同変K群の定義はad hocなものであるが、実はそれがアフィン・グラスマン多様体のK群と同型であるということも証明した。このことにより、大まかには半無限旗多様体の同変幾何学と、旗多様体の同変量子幾何学、そしてアフィン・グラスマン多様体の同変幾何学が等価であるというひとつの「三位一体」を定式化した。この事実の証明も行なったものの、論文自体がまだ査読中であるため実績として記載することはできない。ただ、この「三位一体」は元々Lam-Li-Mihalcea-Shimozonoに予想されていた同型を半無限旗多様体という新しい対象を含む形へとアップグレードする(ことで証明しようという)ものであり、その定式化のレベルですでにそれなりに反響があった。いずれにせよこれらの研究によって2022年の国際数学会議へと招待されその講演録[Proc. ICM 2022]においてアナウンスを行なった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Syu Kato	4. 巻 9
2. 論文標題 Frobenius splitting of Schubert varieties of semi-infinite flag manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Pi	6. 最初と最後の頁 e5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/fmp.2021.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Syu Kato	4. 巻 33
2. 論文標題 Symmetric functions and Springer representations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indag. Math. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 255--278
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.indag.2021.12.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Syu Kato and Ivan Cherednik	4. 巻 374
2. 論文標題 Nonsymmetric Rogers-Ramanujan sums and thick Demazure modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107335
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2020.107335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 加藤周、内藤聡、佐垣大輔	4. 巻 169
2. 論文標題 Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and Pieri-Chevalley formula	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 2421--2500
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Evgeny Feigin, 加藤周, Ievgen Makedonskyi	4. 巻 764
2. 論文標題 Representation theoretic realization of non-symmetric Macdonald polynomials at infinity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal fuer die reine und angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 181--216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2019-0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 加藤周, Sergey Loktev	4. 巻 368
2. 論文標題 A Weyl Module Stratification of Integrable Representations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 113--141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03327-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kato Syu	4. 巻 111
2. 論文標題 The formal model of semi-infinite flag manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the ICM 2022	6. 最初と最後の頁 1600 ~ 1622
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/ICM2022/25	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 The formal model of semi-infinite flag manifolds
3. 学会等名 International Congress of Mathematician 2022 (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Higher level BGG reciprocity for current algebras
3. 学会等名 Representation Theory, Combinatorics and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 A geometric realization of Catalan functions
3. 学会等名 Representation theory and geometry of loop spaces. (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Loop spaces of flag manifolds, quantum geometry, and representation theory
3. 学会等名 Representation theory and geometry of loop spaces. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Geometry of semi-infinite flag manifolds
3. 学会等名 Combinatorial Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Equivariant quantum K-groups of partial flag manifolds
3. 学会等名 Verlinde algebra and Grassmannians (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Equivariant quantum K-groups of partial flag manifolds
3. 学会等名 Mini-courses and lectures: Quiver varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 Quantum K-groups of flag manifolds via semi-infinite flag manifolds
3. 学会等名 Representation Theory, Thematic trimester program on Representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Syu Kato
2. 発表標題 On the definition of semi-infinite flag manifolds and applications
3. 学会等名 Degeneration Techniques in Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~syuchan>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Representation theory and geometry of loop spaces	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------