

令和 5 年 5 月 21 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19H01784

研究課題名(和文) 高次コサイクルによるリーマン面の位相幾何学的研究

研究課題名(英文) Topological Study on Riemann Surfaces through Higher Cocycles

研究代表者

河澄 響矢 (Kawazumi, Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：30214646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)：二重ゲート導分の導入によりトゥラエフ余括弧積の新たな幾何的様相を明らかにし、トゥラエフ余括弧積の二次演算を発見した。曲面の単位余接束の有理ホモロジー群の外積代数に値をもつ写像類群のねじれ係数安定コホモロジーについて自明係数安定コホモロジー代数上の Tor 群の計算を5次外積まで行なった。このような Tor 群の計算はこれまでなかった。また、Kawazumi-Zhang 不変量のねじれ版の研究を行なった。さらに、自由群の自己同型群のねじれ係数安定コホモロジーにある種のオペラド構造を導入した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面の位相的な構造を深く研究するために、曲面上のループのなす演算、曲面の位相的な対称性を記述する写像類群および曲面の上のリーマン面の構造を分類するタイヒミュラー空間の研究を行なった。これら3つのそれぞれについて、新しいループ演算を発見し、写像類群の新しい定量的な研究方法を提案し、タイヒミュラー空間上のある関数についての新しい知見を得た。関連して、既存のループ演算についても新たな幾何的解釈を与え、写像類群と関わりの深い自由群の自己同型群について新たな研究の視点を提案した。

研究成果の概要(英文)：We discovered a new geometric aspect of the Turaev cobracket by introducing the notion of a double gate derivative, and discovered a secondary operation for the Turaev cobracket. We computed the Tor group of the stable cohomology of the mapping class group with coefficients in the exterior algebra of the first rational homology group of the unit tangent bundle of the surface with respect to the stable cohomology algebra with trivial coefficients up to the fifth exterior power. Such a Tor group had never been computed. We studied a twisted version of the Kawazumi-Zhang invariant. Moreover we introduced a certain operadic structure on the twisted stable cohomology group of the automorphism groups of free groups.

研究分野：数学(位相幾何学、リーマン面)

キーワード：リーマン面 ループ演算 トゥラエフ余括弧積 写像類群 自由群の自己同型群 ねじれ係数コホモロジー 安定コホモロジー タイヒミュラー空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) A. Alekseev, 久野雄介, F. Naef と代表者の共同研究で (ジョンソン準同型像に関する) 榎本佐藤トレース、(ループ演算に関する) トウラエフ余括弧積および (ドリinfeld 結合子に関する) 柏原ヴェルニュ問題が一体であることを示した。トウラエフ余括弧積より深い情報をもつループ演算が得られれば、ジョンソン準同型像の問題のみならず柏原ヴェルニュ問題についても大きな展開がもたらされることになる。一方、上述の Alekseev-久野-Naef-代表者の結果の証明には計算で押し切る部分があり、位相的な意味は充分解明されていなかった。

(2) 写像類群および関連して自由群の自己同型群のねじれ係数安定コホモロジーについては 20 年以上前の森田茂之, E. Looijenga, 佐藤隆夫, 代表者などの研究はあったが、この 10 数年ほどホモトピー論的な手法が導入され、かつて未解決だった問題も解かれ始めていた。ホモトピー論導入以前の古典的な手法でも新たな展開は残っていると思われたが、それが具体的に何であるのかは不明確だった。

2. 研究の目的

(1) 榎本佐藤トレース、トウラエフ余括弧積および柏原ヴェルニュ問題が一体であるという代表者らの先行結果を深化させることにより、曲面上の自由ループの高次ループ演算をもちいた写像類群のジョンソン準同型像の完全な特徴づけを目指す。この問題を中心軸としてリーマン面の位相幾何学的研究を質・量ともに発展させる。具体的には自由ループに関する新しい高次ループ演算を見出し、それを曲面上の自由ループの高次コサイクルに実装することが最大の目的であった。これがなされれば、高次元化、オペラド的側面の解明、最終的にはジョンソン準同型像の完全な特徴づけにいたることを目的とした。同時に、Alekseev-久野-Naef-代表者の結果の位相的、複素解析的側面を明らかにすることを目的とした。

(2) 写像類群のねじれ係数安定コホモロジーの研究の古典的手法および複素解析的な手法による新たな展開を目指した。

(3) リーマン面に関する研究の特徴は、さまざまな手法を同時に使うことができることにあり、個別の研究においても周辺分野の研究の発展は不可欠である。そこで、リーマン面を中心とした位相幾何学全般にわたる研究の推進を目指した。

3. 研究の方法

代表者個人の単独研究および国内外の共同研究者との継続的な議論を通しての共同研究による。とくに共同研究者との議論は研究を進める上で重要な因子である。しかし、本研究の研究期間においては、新型コロナ感染拡大のため、国内外の研究者との議論の機会が大きく制限されたのは本研究にとって痛手となった。

4. 研究成果

(1) (1-i) 高次ループ演算については、当初、自由ループでの定義を目指した。国内外の研究者との議論を重ね、試行錯誤をくり返したが、自由ループであることが原因で、Reidemeister 3 に対応するムーブでの不変性が得られず、自由ループでの高次ループ演算の構成はひとまず断念した。2020 年 2 月に点付きループで新しいと思われる高次ループ演算を発見した。高次元化を目論み、ストリングトポロジーの専門家の招聘を試みた。しかし、この演算は 2021 年度に共同研究者久野雄介の指摘により既存の演算に含まれることも判明し招聘も断念した。

その後、久野との共同研究の結果、点つきトウラエフ余括弧積が曲面の基本群の群環のある両側イデアルに含まれるループについて、その両側イデアルの商環に値をもつ新たなループ演算が定義できた。これは secondary な点つきトウラエフ余括弧積と解釈できる。研究を重ねて情報を保ったまま簡易化することに成功した。簡易化することでトウラエフ余括弧積との関係は明確になったが、既知の演算で書けるか書けないかは不明である。大変残念なことであるが目標とする高次コサイクルには至らなかった。

(1-ii) A. Alekseev, 久野雄介, F. Naef との共同研究によって、Turaev による gate derivative を改良した double gate derivative を導入し、コンパクト曲面の任意の gate system について随伴する framing を発見し、その framing に関するトウラエフ余括弧積の形

式性定理の double gate derivative をもちいた幾何学的別証がえられた。

(2)(2-i) 本項は Arthur Soulie との共同研究による。曲面の単位接束のホモロジー群に係数をもつ写像類群のねじれ係数安定コホモロジー群は、自明係数安定コホモロジー代数の上で自由加群ではないことを発見した。このような例はこれまで発見されていなかった。このコホモロジー群は自由加群でないため、自明係数安定コホモロジー代数上のトーション群を計算した。ここまではプレプリント arXiv: 2211.02793 として公開している。つぎに、一般の d について、曲面の単位接束のホモロジー群の d 次外積に値をもつ写像類群のねじれ係数安定コホモロジー群の計算を行なった。まず、 $d=2$ は例外で自明係数安定コホモロジー代数上自由であって基底も具体的に与えられる。外積代数全体を考えた場合、この計算は無限変数多項式代数の導分についての核と余核の計算に他ならず、一般の d で計算することを目指したが、導分をベクトル場と見たときの特異点が処理できず、自明係数安定コホモロジー代数を適切に局所化したときの代数としての自由生成系を得た。つぎに、このねじれ係数安定コホモロジー群の自明係数安定コホモロジー代数上のトーション群を計算に移行した。計算の実行には、あるフィルトレーションの導入や、 Tor_0 の計算の枠組みの準備などが必要となった。 $d=5$ からは問題はさらに複雑になったが、当面の我々の限界である $d=5$ までは計算を完遂する目処がたった。写像類群および自由群の自己同型群のねじれ係数安定コホモロジー群は本研究以外にはすべて自明係数安定コホモロジー代数の上で自由であった。自由でない例が見つかったことにより、このようなトーション群を計算する一般的な枠組みの探究が新しい大きな課題として現れたことになる。

(2-ii) 共同研究者 Christine Vespa とともに、かつて代表者が構成していた、自由群の自己同型群のねじれ係数安定コホモロジー類の系列がオペラドの一種である wheeled PROP を使って整理できることを明らかにした。これによって自由群の自己同型群のねじれ係数安定コホモロジー群の計算がオペラドの言葉で定式化できることになった。

(2-iii) 写像類群のねじれ係数安定コホモロジーに由来する閉リーマン面のモジュライ空間上の実数値関数である Kawazumi-Zhang 不変量は、モジュライ空間上の標準的なテンソル場に一般化され、その縮約として表示される。これについての代表者の 2016 年の口頭発表を受けて d' Hoker-Schlotterer が論文 Comm. Number Theory and Physics, vol.16-1, 35-74(2022) を書いており、我々の構成について記録に残すためプレプリント (arXiv: 2210.00532) として公開した。とくに応用として、このテンソル場が第一 Mumford-Morita-Miller 類を表示することと、種数 3 の Kawazumi-Zhang 不変量の振る舞いを書き加えた。

(3) 国際研究集会「Johnson homomorphisms and related topics 2019」2019年5月13日(月)-17日(金)まで東京大学大学院数理科学研究科において共催した。また、国際研究集会「The 14th MSJ-SI : New Aspects of Teichmuller theory」を学習院大学において 2022年7月19日から22日まで東京大学大学院数理科学研究科において 2022年7月25日から29日まで共催した。研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」を 2019年9月6日(金)-9月9日(月), 2020年8月17日(月)-8月19日(水), 2021年8月16日(月)-8月19日(木), 2022年9月5日(月)-9月8日(木) の合計4回開催した。

研究集会「葉層構造の幾何学とその応用」2019年12月13日から15日まで、2020年12月12日から13日まで、2021年12月10日から12日までの合計3回共催した。研究集会「リーマン面のモジュライ空間の諸相」を2020年1月23日から1月25日まで、研究集会「第47回変換群論シンポジウム」を2020年12月3日に、共催した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Aleksseev Anton, Kawazumi Nariya, Kuno Yusuke, Naef Florian	4. 巻 11
2. 論文標題 Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 657 ~ 689
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/143	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kawazumi Nariya	4. 巻 -
2. 論文標題 Some algebraic aspects of the Turaev cobracket	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and Geometry, dedicated to V. Turaev	6. 最初と最後の頁 329 ~ 356
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/IRMA/33-1/17	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nariya Kawazumi and Christine Vespa	4. 巻 -
2. 論文標題 On the wheeled PROP of stable cohomology of $\text{Aut}(F_n)$ with bivariant coefficients	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 15件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 The Turaev cobracket and gate double derivatives
3. 学会等名 Conference: New developments in quantum topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河澄響矢
2. 発表標題 グラフと曲線
3. 学会等名 高校生のための現代数学講座「いろいろな幾何学」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 Gate double derivatives
3. 学会等名 Expansions, Lie algebras and Invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 Gate double derivatives
3. 学会等名 Geometry and Topology seminar, University of Luxembourg (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 Formality of the Goldman bracket
3. 学会等名 Seminar "Homotopy Algebra and Geometry", University of Luxembourg (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 A double version of Turaev's gate derivatives
3. 学会等名 Seminaire Algebre et topologie, University of Strasbourg (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河澄響矢
2. 発表標題 ゴールドマン括弧積と写像類群
3. 学会等名 研究会「タイヒミュラー空間と双曲幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 The mapping class group orbits in the framings of compact surfaces
3. 学会等名 Geometry and Topology seminar, University of Luxembourg (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and its applications (3)(4)
3. 学会等名 Interactions entre algebre et geometrie (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 A double version of Turaev's gate derivatives
3. 学会等名 Teichmuller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 A double version of Turaev's gate derivatives
3. 学会等名 RIMS 研究集会「Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河澄響矢
2. 発表標題 トポロジー 否定的なものを代数的に捉える
3. 学会等名 2021年度教養総合「数理学の最先端」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河澄響矢
2. 発表標題 リーマン面に関連する位相幾何学の問題
3. 学会等名 RIMS 共同研究「複素幾何学の諸問題 II」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河澄響矢, 久野雄介
2. 発表標題 写像類群のリー代数を求めて
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会トポロジー分科会幾何学分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河澄響矢
2. 発表標題 A double version of Turaev 's gate derivatives
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Nariya Kawazumi
2. 発表標題 Stable cohomology of the mapping class groups with some particular twisted coefficients
3. 学会等名 Seminaire GT3, University of Strasbourg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 河澄 響矢	4. 発行年 2022年
2. 出版社 東京大学出版会	5. 総ページ数 336
3. 書名 トポロジーの基礎 上	

1. 著者名 河澄 響矢	4. 発行年 2022年
2. 出版社 東京大学出版会	5. 総ページ数 416
3. 書名 トポロジーの基礎 下	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Johnson homomorphisms and related topics 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 The 14th MSJ-SI : New Aspects of Teichmuller theory	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
スイス	ジュネーブ大学	トリニティカレッジダブリン	