

令和 6 年 5 月 20 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01786

研究課題名（和文）最適輸送理論と勾配流の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometry of optimal transport theory and gradient flows

研究代表者

太田 慎一（Ohta, Shin-ichi）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00372558

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,200,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、最適輸送理論に関わる比較幾何学、および距離空間上の凸関数の勾配流に関して、多くの成果が得られた。まず、最適輸送理論に基づく局所化の技法を用いて、重みつきリーマン多様体においてBakry-Ledoux型等周不等式の安定性と対数ソボレフ不等式の剛性を得た。また、時間方向に重みつきリッチ曲率が下に有界な重みつきフィンズラー時空に対し、種々の比較定理と時間的曲率次元条件を確立した。一方、勾配流の研究では、大域的な意味で負曲率を持つGromov双曲空間において、凸関数の時間離散的な勾配流の収縮性、確率測度の重心の収縮性と大数の法則を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

重みつきフィンズラー時空の時間的曲率次元条件の確立は、近年活発になっている時間的曲率次元条件を満たすローレンツ弧長空間の比較幾何学および相対性理論的な研究におけるフィンズラー時空の立ち位置を明確にするものであり、ローレンツ弧長空間の今後の研究の方向性を定める上で本質的な重要性を持つ。また、Gromov双曲空間はリーマン多様体ではないフィンズラー多様体を含むため、凸関数の時間離散的な勾配流の収縮性は非リーマン的な距離空間で得られた初めての収縮性として価値がある。

研究成果の概要（英文）：We had a number of achievements in comparison geometry related to optimal transport theory and in the theory of gradient flows for convex functions on metric spaces. Using the localization technique based on optimal transport theory, we obtained the stability of the Bakry-Ledoux-type isoperimetric inequality as well as the rigidity of the logarithmic Sobolev inequality on weighted Riemannian manifolds. For weighted Finsler spacetimes of timelike weighted Ricci curvature bounded below, we established various comparison theorems and the timelike curvature-dimension condition. Moreover, on Gromov hyperbolic spaces, we showed contraction properties of discrete-time gradient flows for convex functions, a contraction property for barycenters of probability measures, and a law of large numbers.

研究分野：微分幾何学

キーワード：最適輸送 勾配流 凸関数 リッチ曲率 フィンズラー時空 Gromov双曲空間 重心 情報幾何

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

最適輸送理論は距離空間上に与えられた 2 つの確率分布の一方を他方に最小のコストで輸送する方法に関する理論であり、確率論、微分幾何学、発展方程式等への応用の他、近年は画像解析や機械学習でも活用されている。定空間の距離関数を用いて定義される最適輸送コストの一種である Wasserstein 距離についての重心は、理論・応用両面で重要な研究対象であるが、Wasserstein 距離の凸性の低さから非一意かつ不安定であるなど、その扱いは難しい。一方、重心を求める際にも利用される勾配流について、角度が定義可能なリーマン的な空間では研究が進んでいるのに比べて、ノルム空間やフィンスラー多様体のようなリーマン的でない空間では研究が著しく遅れており、特に凸関数の勾配流に対し何らかの収縮性が成り立つかが大きな未解決問題であった。

### 2. 研究の目的

本研究課題の当初の目的は、以下の 2 点であった：

- (1) 最適輸送写像や Wasserstein 距離、Wasserstein 空間内の重心の幾何学的な性質についての、定量的な評価を含めたより深い理解。
- (2) ノルム空間やフィンスラー多様体の勾配流の革新的な研究と、その幾何学や解析学への応用。

具体的には、(1)では有限個または無限個の確率測度の Wasserstein 距離で測った重心について特殊な確率分布による近似(射影)を通して何らかの定量的な評価を与えること、(2)ではリーマン的ではない距離空間での勾配流の研究、また双方に関わるものとして、最適輸送理論や勾配流と関連した比較幾何学や幾何解析学の研究や、大数の法則(重心への収束)への応用、を目的としていた。

### 3. 研究の方法

研究の目的で述べた課題(1)については、当初の研究計画にはなかったローレンツ幾何学への最適輸送理論の応用が急速に進んだため、ローレンツ・フィンスラー多様体の比較幾何学や幾何解析学の研究に力を入れた。また、以前から続けていた局所化を用いた技法により、等周不等式の安定性と対数ソボレフ不等式の剛性を確立した。一方、当初の研究計画に沿った研究は研究分担者の高津が行なった。

課題(2)については、リーマン多様体ではないフィンスラー多様体を含むものとして大域的に負曲率を持つ Gromov 双曲空間に着目し、空間構造に適合した時間離散的な勾配流の性質や確率測度の重心および大数の法則の研究を行なった。また、距離が対称でない距離空間上の凸関数の勾配流の基本的な性質の研究、ノルム空間上の凸関数が持ち得る収縮性の形についての研究も行なった。

### 4. 研究成果

- (1) 課題(1)に関連した研究では、最適輸送理論を用いた比較幾何学・幾何解析学への応用で多くの成果が得られた。まず、幾つか用語の説明をする。重みつきリーマン多様体とはリーマン多様体とその上の測度の組であり、測度に応じてリッチ曲率を変形した重みつきリッチ曲率が主要な興味の対象である。重みつきリッチ曲率は実変数  $N$  を含み、 $N$  を明示して  $N$ -リッチ曲率とも呼ばれる。 $N$ -リッチ曲率が定数  $K$  以上であることは、エントロピーの Wasserstein 距離についての凸性で特徴づけることができ、この性質を曲率次元条件と呼ぶ。曲率次元条件は多様体の構造を用いずに定義できるため、曲率次元条件を満たす測度距離空間の「リッチ曲率が下に有界な空間」としての研究が活発に行われている。

最適輸送理論を用いて構成される局所化の技法を用いて、等周不等式の安定性の研究を行なった(Cong Hung Mai 氏との共同研究)。局所化とは空間を測地線の族に分解する方法であり、等周不等式においては高次元の等周問題を 1 次元(区間)でのより扱いやすい問題に帰着できる。この研究では、 $N$ -リッチ曲率が正定数以上の重みつきリーマン多様体で成り立つ Bakry-Ledoux 型等周不等式で等号に近い式が成り立つ場合を考えた。等号が成立するのは 1 次元ガウス分布との直積である場合に限るという剛性定理が知られており、この研究では、等号に近い場合には 1 次元ガウス分布との直積にある意味で近いという安定性を確立した。等周不等式や関数不等式の安定性は近年研究が活発になっているが、 $N$ -リッチ曲率が正定数以上という状況は非コンパクトな空間も現れるため扱いづらく、複雑な評価を必要とする結果であった。

研究分担者の高津との共同研究では、同様に局所化を用いた議論によって対数ソボレフ不等式の剛性を示した。対数ソボレフ不等式は  $N$ -リッチ曲率が正定数以上の重みつきリーマン多様体で成り立つ重要な不等式である。この研究では、対数ソボレフ不等式で等号が成り立つのは 1 次元ガウス分布との直積である場合に限ることを示した。対数ソボレフ不等式はユークリッド空間の場合に様々な角度からの安定性の研究が行われているが、リーマン多様体の場合には剛性も未解決であった。

ローレンツ多様体のフィンスラー版であるフィンスラー時空の研究を Yufeng Lu 氏、Ettore Minguzzi 氏と行い、基礎理論を整備すると共に、時間方向で重みつきリッチ曲率が下に有界な重みつきフィンスラー時空の比較定理や特異点定理、分解定理を確立した。更に、Mathias Braun 氏との共同研究で時間方向に重みつきリッチ曲率が下に有界であることと時間的曲率次元条件の同値性を示した。曲率次元条件の理論のローレンツ幾何学や相対性理論の研究への応用が近年活発になっており、測度距離空間のローレンツ版として導入されたローレンツ弧長空間の研究が急速に進展している。この流れの中で、フィンスラー時空は重要な位置を占める。具体的には、エントロピーの時間方向での凸性として定義される時間的曲率次元条件と重みつきリッチ曲率の下限がフィンスラー時空でも同値であることにより、時間的曲率次元条件のみではフィンスラー時空で成り立たない性質（例えば、分解定理）は期待できない。これは時間的曲率次元条件を満たすローレンツ弧長空間の研究の進展に影響を与えるものである。

Yufeng Lu 氏、Ettore Minguzzi 氏とは、 $\kappa$ -range という新たなリッチ曲率の下限条件を導入し、それに対応する比較定理（Bonnet-Myers 型の直径評価、Bishop-Gromov 型体積比較定理、ラプラシアン比較定理）を重みつきフィンスラー多様体、重みつきフィンスラー時空の場合にそれぞれ与える研究も行った。 $\kappa$ -range は通常考えられる曲率が定数以上という状況と Wylie により考えられていた曲率がある関数以上という状況を包含するものとして導入され、実変数  $\kappa$  の値を定められた範囲内で変えることで多様な曲率条件を記述できる。例えば、 $\kappa$ -リッチ曲率が正定数以上の場合に Bonnet-Myers 型の直径評価は成り立たないが、 $\kappa$ -range の下では、 $\kappa$ -リッチ曲率が適切な  $\kappa$  を用いた関数以上である場合に Bonnet-Myers 型の直径評価の対応物を得ることができる。 $\kappa$ -range を用いた比較幾何・幾何解析は他の研究者にも取り上げられ、広がりを見せている。

研究分担者の高津は最適輸送距離を求める際の緩和（エントロピー正則化）問題に取り組み、通常は Kullback-Leibler divergence（シャノンエントロピー）で緩和するものを Bregman divergence で緩和した際の振る舞いを調べた。また、北川潤氏と共同で、射影を繰り返すことによって最適輸送距離の計算量を近似的に減らす sliced Wasserstein 距離の性質を理論的に研究し、完備性、可分性、測地性、双対性や元の最適輸送問題との関係を明らかにした。

(2) 次に課題(2)に関連した研究成果を述べる。

フィンスラー多様体を含む距離空間として Gromov 双曲空間に着目し、凸関数の勾配流および確率測度の重心の研究を行った。Gromov 双曲性は大域的な意味での負曲率性であり、樹（tree）を摂動したようなものと解釈できる。Gromov 双曲空間は、ヒルベルト幾何のようなリーマン多様体ではないフィンスラー多様体を含むため、課題(2)へのアプローチの一つとして研究を始めた。Gromov 双曲性は粗い条件のため精密な評価は不可能だが、摂動の大きさを表す正数  $\delta$  に依存する形で、凸関数の時間離散的な勾配流の収縮性、確率測度の重心の Wasserstein 距離についての収縮性、大数の法則を示した。重心と大数の法則の研究は課題(1)とも関わるものである。

Wei Zhao 氏との共同研究では、フィンスラー多様体のように距離が非対称な距離空間上の凸関数の勾配流を扱い、Ambrosio-Gigli-Savare らによって対称な距離空間で確立された勾配流の存在や特徴づけを非対称な場合に拡張した。非対称な距離空間は非リーマン的であるため、これも課題(2)に関わる研究である。応用として、フィンスラー多様体上の有界な関数を初期値とする熱方程式の解を Wasserstein 空間内の相対エントロピーの勾配流として構成した。

ノルム空間上の凸関数の勾配流が収縮性を持たないことを改めて詳しく解析し、考えられる弱い収縮性の形を提案した。収縮性を持たないことは 2 つの線形関数の大きい方の値を取る単純な凸関数を用いて示すことができ、ノルムの凸性や凹性に依存した定数を用いた弱い収縮性が成り立つことを期待しているが、従来の微分不等式を用いた手法は通用せず、未解決である。

この他、研究分担者の横田は測度距離空間やその列からなるピラミッドの研究に取り組み、特に測度距離空間のなす集合がボックス距離についてプレコンパクトならばリプシッツ順序において有界となることを示した（数川大輔氏との共同研究）。集中位相は確率測度を持つ測度距離空間のなす空間において Gromov-Hausdorff 収束よりも弱い位相を与え、特に次元が無限大に発散していく列も適切に扱うことができるという特長があり、曲率次元条件に関わる幾何解析の文脈でも有用である。

また、研究分担者の高津は松添博氏と情報幾何学についての共同研究を行い、独立同分布でない試行に適した不変量を有する確率単体上のリーマン計量の構成、同一のエントロピーが異なる情報幾何構造を導く「エントロピーの不定性」の具体例の構築を行なった。情報幾何学と最適輸送理論は共に確率測度のなす空間の幾何学を扱うものであり、広い意味で課題(1)とも関わる研究成果である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件／うち国際共著 6件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Mathias Braun, Shin-ichi Ohta	4. 巻 377
2. 論文標題 Optimal transport and timelike lower Ricci curvature bounds on Finsler spacetimes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3529-3576
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/9126	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Mai Cong Hung, Ohta Shin-ichi	4. 巻 96
2. 論文標題 Quantitative estimates for the Bakry-Ledoux isoperimetric inequality	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Commentarii Mathematici Helvetici	6. 最初と最後の頁 693 ~ 739
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/cmh/523	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Lu Yufeng, Minguzzi Ettore, Ohta Shin-ichi	4. 巻 10
2. 論文標題 Comparison Theorems on Weighted Finsler Manifolds and Spacetimes with epsilon-Range	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Analysis and Geometry in Metric Spaces	6. 最初と最後の頁 1 ~ 30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/agms-2020-0131	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazukawa Daisuke, Yokota Takumi	4. 巻 215
2. 論文標題 Boundedness of precompact sets of metric measure spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 229 ~ 242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-021-00646-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lu Yufeng, Minguzzi Ettore, Ohta Shin ichi	4. 巻 104
2. 論文標題 Geometry of weighted Lorentz-Finsler manifolds I: singularity theorems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 362 ~ 393
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12434	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shin-ichi Ohta, Asuka Takatsu	4. 巻 162
2. 論文標題 Equality in the logarithmic Sobolev inequality	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 271-282
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-019-01134-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計37件 (うち招待講演 32件 / うち国際学会 21件)

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Geometry of weighted Finsler spacetimes
3. 学会等名 VIASM-ICTP Workshop: Topics in Contemporary Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Asuka Takatsu
2. 発表標題 Riemannian starshape and capacity problems
3. 学会等名 Functional Inequalities and Asymptotic Analysis of Nonlinear Elliptic Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Discrete-time gradient flows in Gromov hyperbolic spaces
3. 学会等名 New Trends in Dirichlet Forms and Optimal Transport (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Comparison theorems under lower Ricci curvature bounds with epsilon-range
3. 学会等名 Workshop on Aspects of Ricci Curvature Bounds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Barycenters and a law of large numbers in Gromov hyperbolic spaces
3. 学会等名 Pacific Rim Mathematical Association Congress 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 On weighted Ricci curvature with negative dimension parameter
3. 学会等名 Analysis and geometry of fractals and metric spaces: Recent developments and future prospects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Geometry of weighted Finsler spacetimes
3. 学会等名 Non-regular Spacetime Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin-ichi Ohta
2. 発表標題 Geometry of weighted Lorentz-Finsler manifolds
3. 学会等名 The second Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 横田巧
2. 発表標題 測度距離空間の幾何学とその拡張
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Asuka Takatsu
2. 発表標題 Equality in the logarithmic Sobolev inequality
3. 学会等名 6th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

## 〔図書〕 計1件

1. 著者名 Shin-ichi Ohta	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 316
3. 書名 Comparison Finsler Geometry	

## 〔産業財産権〕

## 〔その他〕

Web Page of Shin-ichi OHTA <a href="http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sohta/">http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sohta/</a>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	横田 巧 (Yokota Takumi) (70583855)	東北大学・理学研究科・准教授  (11301)	
研究分担者	高津 飛鳥 (Takatsu Asuka) (90623554)	東京都立大学・理学研究科・准教授  (22604)	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

## 〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Geometry and Probability	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Geometry and Probability	開催年 2022年～2022年



国際研究集会 Geometry and Probability	開催年 2019年～2019年
------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	Fields Institute			
中国	East China University of Sci. & Tech.			
イタリア	University of Florence			