

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01790

研究課題名(和文) ランダムな実および複素力学系、正則写像半群とフラクタル幾何学の研究

研究課題名(英文) Research on random real and complex dynamical systems, semigroups of holomorphic maps and fractal geometry

研究代表者

角 大輝 (Sumi, Hiroki)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：40313324

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,400,000円

研究成果の概要(和文)：ランダム力学系の極限状態関数の各点ヘルダー指数のマルチフラクタル解析、核ジュリア集合が空と限らないランダム複素力学系の一般論、非コンパクト生成ランダム複素力学系のランダム性誘起現象、ランダム緩和ニュートン法とその高次元版、ランダム実多項式力学系の一般の雑音誘起現象の研究とその自然科学全体への応用、マルコフ的ランダム複素力学系と付随する集合値力学系、半双曲的有理半群に付随する歪積、無限等角反復関数系の研究、リーマン面の写像類群の作用の力学系、高次元正則多項式写像のランダム力学系の研究を行い、多くの査読有論文を掲載し、国内外での多数の招待講演を行った。また複数の研究集会を開催した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自然科学や工学、社会科学の広い分野における複雑現象は力学系で記述されることが多い。自然界や実社会にランダム項やノイズが多く存在するため、ランダム力学系、不定外力が加わった非自励系、多価写像の力学系(写像半群、反復関数系等)の研究が重要視され、盛んになってきた。これら3つの話題は互いに関連がある。これらにおいては、雑音誘起秩序、雑音誘起カオスなどランダム性もたらす、決定論的な系とは異なる興味深い現象が数多く観察されている。そのメカニズムを解明して、知見を増やすことは、自然科学の深い理解につながり、科学全般の数理モデルで現れるランダム性の効果の活用と良いランダムシステムの構築・設計につながる。

研究成果の概要(英文)：We investigated multifractal analysis of limit state functions of random dynamical systems, general theory of random holomorphic dynamical systems with non-empty kernel Julia sets, randomness-induced phenomena in unbounded random holomorphic dynamical systems, random relaxed Newton's methods and their higher dimensional analogues, the study of noise-induced phenomena of random dynamical systems of real polynomials and its applications to natural sciences, Markov random holomorphic dynamical systems and their associated set-valued dynamical systems, ergodic properties of skew products of semi-hyperbolic rational semigroups, infinite conformal iterated function systems, dynamics of mapping class groups of Riemann surfaces, and higher-dimensional random holomorphic dynamical systems. We published many papers with reviews, and we gave many invited talks in various countries. We also organized several conferences.

研究分野：ランダム複素力学系、フラクタル幾何学、エルゴード理論

キーワード：ランダム複素力学系 ランダム力学系 正則写像半群 フラクタル ランダム性誘起現象 エルゴード理論 複素解析学

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

自然科学や工学、社会科学の広い分野における複雑現象は力学系で記述されることが多い。自然界や実社会にランダム項やノイズが多く存在するため、ランダム力学系、不定外力が加わった非自励系、多価写像の力学系(写像半群、反復関数系等)の研究が重要視され、盛んになってきた。これら3つの話題は互いに関連がある。これらにおいては、雑音誘起秩序、雑音誘起カオスなどランダム性がもたらす、決定論的な系とは異なる興味深い現象が理論的に、あるいは数値実験的に数多く考察されはじめていた。

その一方で、決定論的力学系を実数上あるいは実多様体上で行うのが本来の数理モデルに直接結びつくものではあるが、それを複素化したもの、すなわち、複素平面、複素多様体上での正則写像の反復合成による「複素力学系」の研究は、1980年代より爆発的な発展を遂げ、多くの重要な結果が得られてきた。実ユークリッド空間あるいは実多様体上の力学系の話も、その相空間を含む複素ユークリッド空間あるいは複素多様体上の力学系の話もを解析することで、深く理解できるはずであるという哲学がある。

この両者の考えを結び付けて、複素多様体上で、正則写像らによるランダムな力学系を考えることは極めて自然であり重要であると考えられる。1991年に Fornaess と Sibony により初めてランダム複素力学系の論文が世に出て以来、多くの研究がなされてきた。かつ、1996年に Hinkkanen と Martin により正則写像の半群の力学系の研究が開始されていた。研究代表者はこの両者の研究を結び付けて、多くの項目を多角的に同時に研究することで全ての項目を発展させるという研究手法を思いつき、ランダム複素力学系、正則写像半群の力学系等の関連する話題の研究を深化させてきていた。

2. 研究の目的

本研究の大きな目的はランダム力学系理論、写像の半群の力学系、フラクタル幾何学、およびそれらの応用を同時に扱い、その理論および構想と哲学を純粋数学にとどまらず非線形物理学や数理生物学などの他分野へ訴えかけることにある。特に複素多様体上の正則写像のなす半群(以下正則写像半群)の力学系と、正則写像の族によるランダム力学系の両者の理論とその交差的研究については研究代表者の25年以上にわたる研究による蓄積がある。それらを効果的に活かしながら、ランダム力学系におけるランダム性の影響や効果、カオスと秩序の間のグラデーションなど、決定論的力学系には起こりえない、ランダム性がランダム力学系にもたらす新しい現象(ランダム性誘起現象、雑音誘起現象)の解析を追究して自然科学・社会科学全体に対して新しい世界観を提供していく。さらに新しい問題を提起しそれを探求する。

3. 研究の方法

ランダム力学系理論、写像の半群の力学系、フラクタル幾何学、およびそれらの応用を同時に扱い、それぞれを交錯させながら多角的に全体の理論を構築していき、かつ各項目をステップアップさせていく。これを繰り返していくことによって、上記の4つの柱と関連する様々な研究項目をそれぞれ少しずつブラッシュアップしていき、そして相互関連の結びつきを強めながら、全体の理論を深化させていく。その際、角は研究代表者として研究の総括を行い、イエーリッシュはランダム複素力学系とエルゴード理論の研究を行い、諸澤は正則写像の半群の力学系の研究を行い、上原は高次元(ランダム)複素力学系とその「リーマン面の写像類群の作用」の話題への応用の研究を行い、中西はタイヒミュラー空間論およびリーマン面の写像類群の作用の話題の力学系的側面の研究を行い、佐藤はランダム力学系理論の自然科学全般への応用面の研究を行うこととした。また、佐藤とは、ランダム力学系、集合値力学系、応用系の研究集会を共催して、研究分担者、協力者が研究集会に参加して議論を行い、研究を深化させていくという方法を取った。

具体的には、(1)ランダム力学系のカオスと秩序の間のグラデーション(2)ランダム力学系の極限状態に表れる関数の特徴や各点ヘルダー指数の「マルチフラクタル解析」(3)実直線上のランダム実多項式力学系の雑音誘起カオスのメカニズム(4)核ジュリア集合が空とは限らないランダム実・複素力学系の一般論の深化と分岐現象の詳細の記述(5)非コンパクト生成ランダム複素力学系でそのランダムジュリア集合が一様完全でない状況(ランダム性誘起現象)の詳細(6)ランダム緩和ニュートン法とその高次元版のランダム性の効果の追究(7)ランダム実多項式力学系の一般の雑音誘起現象の研究とその非線形物理学を含む幅広い自然科学全体への応用(8)実拡大的写像のランダム力学系の詳細の研究や無限生成拡大的有理半群のプレジュリア集合のハウスドルフ次元のパラメータに関する実解析性の研究(9)マルコフ的複素力学系のジュリア集合のハウスドルフ次元の評価とフラクタル的特徴(10)半双曲的有理半群に付随する歪積のエルゴード理論的性質(11)1パラメータ多項式半群の力学系とパラメータ空間の研究(12)無限等角反復関数系とそのパラメータ空間の研究(13)リーマン面の写像類群の作用の力学系(14)高次元正則多項式写像のランダム力学系(15)マルコフ的ランダム(複素)力学系(16)マルコフシステムのコホモロジー、の研究を包括的に行うという方法を取った。これらの問題の研究のため、研究代表者・

分担者・研究協力者と打ち合わせを行い議論を重ねた。特に(1)(2)(3)(8)(9)についてイエーリッシュや渡邊天鵬氏(中部大)との研究打ち合わせを行い、(5)についてM. Comerford氏(Univ. Rhode Island, アメリカ)、R. Stankewitz氏(Ball State University, アメリカ)、Kurt Falk氏(Christian-Albrechts-Universitaet zu Kiel, ドイツ)と研究打ち合わせを行い、(6)についてTuyen Truong氏(オスロ大学、ノルウェー)と研究打ち合わせを行い、(12)について伊縫寛治氏(同志社大)と研究打ち合わせを行い、(13)について上原崇人氏(岡山大)や中西敏浩氏(島根大)と研究打ち合わせを行う、という方法を取った。

4. 研究成果

角は核ジュリア集合が空とは限らない1次元ランダム複素力学系の一般論を構築し、通有的なシステムが弱い安定性(弱平均安定性)を持つことを示して、弱平均安定性を持つシステムの種類を行った。かつその研究の応用として一変数多項式の根を探す方法である「ランダム緩和ニュートン法」を提起して、それが決定論的ニュートン法と比べてランダム性の効果により多くの利点を持つことを示した。また、高次元ランダム複素力学系の研究を行い、一つの正則写像の反復合成による力学系では起こりえない多くの新しい現象を考察した。特に複素2次元の一般化エノン写像のランダム力学系のほとんどのものは、「平均安定性」という著しい秩序性を持つことを示した。ここで、エノン写像は複素二次元射影空間全体へは正則に拡張されず、不定点を持つなど、複素高次元特有の難しさが現れるのだが、それをうまく乗り越える技術を開発することに成功した。また、複素2次元のレギュラー多項式写像のランダム力学系についても、多くのシステムが平均安定性を持つ等の結果を得た。また、ノイズの確率測度の台が内点を持つなどの条件下で平均安定とは限らない2次元ランダム複素力学系について、リアプノフ指数が負であることなど、少し弱い安定性を持つことなどを示した。さらに、非有界多項式列のジュリア集合の非一様完全性などの、通常の一つの多項式の反復では起こりえない新しい現象を詳しく研究して複数の結果を得た。また、イエーリッシュとともに、実直線上の拡大的写像のランダム力学系の推移作用素のスペクトルギャップ性を示し、ランダム力学系の極限状態関数の各点ヘルダー指数のマルチフラクタル解析や、マルコフ的複素力学系のジュリア集合の次元に関する結果を得た。また、角は伊縫氏(同志社大)とともに複素連分数展開に関する無限等角反復関数系の極限集合のフラクタル次元と測度に関する結果を得た。これらのいくつかの結果について複数の論文を出版し、また国内外の研究集会で多くの招待講演を行った。

上原は特定のクラスの複素曲面の構成およびその上の双有理自己同型写像による力学系の解析を行なった。有理曲面を用いてK3曲面を力学系的に構成してその性質を明らかにし、複素曲面上の力学系の複雑さを表すエントロピーについて考察して結果を得た。

中西は写像類群のタイヒミュラー空間への作用の有理変換表現と曲面群の3次元双曲等長変換群への行列表現を用いて境界群と呼ばれるクライン群のいくつかの具体例を構成した。その結果、残留極限点をもつクライン群など特徴的性質をもつクライン群を見つけることができた。

諸澤は有理関数の半群の力学系とinner composite functionsの力学系の研究を行って複数の結果を得た。

イエーリッシュは有限生成フックス群に付随するBowen-Series写像の熱力学的形式と大偏差原理などについて研究を行った。

佐藤はランダム力学系における新たな間欠性と異常拡散を発見したほか、ランダム力学系理論をジェット気流の時系列解析、機械学習の停滞現象の解析、感染症モデルの解析に応用した。さらに、雑音誘起現象の存在に関する計算機援用証明を行ったほか、ランダム力学系と確率微分方程式で生じる確率カオスと関連する確率的非線形現象に関する研究と計算支援ライブラリの開発を行った。さらにサマースクール「計算エルゴード理論の基礎」を北海道大学で開催した。

和田はフラクタル幾何学研究支援プログラムであるFractalGazerを開発し、それを用いて3つの相似変換による相似タイリングを多数発見した。

また、角と佐藤はランダム力学系・非自励力学系・多価写像力学系の研究集会を度々共催して、そこで研究分担者、研究協力者が議論を行い研究を深化させることができた。

また、多くの査読有論文を出版し、かつ国内外の招待講演を数多く行った。特に、角の2019年度日本数学会解析学賞受賞理由の一つである、核ジュリア集合が空と限らない1次元ランダム複素力学系の一般論の構築と通有的システムの性質「弱平均安定性」の研究とそのランダム緩和ニュートン法への応用についての論文を出版したこと、日本数学会での解析学賞受賞記念講演を行ったことは特筆に値する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 2件）

| | |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名 Hiroki Sumi, Takayuki Watanabe | 4. 巻 35 |
| 2. 論文標題 Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the generic dichotomy | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Nonlinearity | 6. 最初と最後の頁 1857 ~ 1875 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ac4a89 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------|
| 1. 著者名 T. Koike, T. Uehara | 4. 巻 6 |
| 2. 論文標題 A gluing construction of projective K3 surfaces | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.46298/epiga.2022.volume6.8504 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Toshihiro Nakanishi and Akira Ushijima | 4. 巻 24 |
| 2. 論文標題 Existence of exceptional points for Fuchsian groups of finite coarea | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics | 6. 最初と最後の頁 164--176 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ecgd/353 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Hiroki Sumi, Takayuki Watanabe | 4. 巻 32 |
| 2. 論文標題 Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Nonlinearity | 6. 最初と最後の頁 3742 ~ 3771 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ab231e | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Mark Comerford, Rich Stankewitz, Hiroki Sumi | 4. 巻 40 |
| 2. 論文標題 Hereditarily non uniformly perfect non-autonomous Julia sets | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 33 ~ 33 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020002 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Kanji Inui, Hikaru Okada, Hiroki Sumi | 4. 巻 40 |
| 2. 論文標題 The Hausdorff dimension function of the family of conformal iterated function systems of generalized complex continued fractions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - A | 6. 最初と最後の頁 753 ~ 766 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020060 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Kanji Inui, Hiroki Sumi | 4. 巻 26 |
| 2. 論文標題 Hausdorff measures and packing measures of limit sets of CIFSs of generalized complex continued fractions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications | 6. 最初と最後の頁 104 ~ 121 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10236198.2019.1709063 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Johannes Jaerisch, Hiroki Sumi | 4. 巻 377 |
| 2. 論文標題 Spectral Gap Property for Random Dynamics on the Real Line and Multifractal Analysis of Generalised Takagi Functions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 1 ~ 36 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03766-5 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Johannes Jaerisch, Hiroki Sumi | 4. 巻 377 |
| 2. 論文標題 Spectral Gap Property for Random Dynamics on the Real Line and Multifractal Analysis of Generalised Takagi Functions | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 1 ~ 36 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03766-5 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名 Hiroki Sumi | 4. 巻 384 |
| 2. 論文標題 Negativity of Lyapunov Exponents and Convergence of Generic Random Polynomial Dynamical Systems and Random Relaxed Newton's Methods | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 1513 ~ 1583 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-021-04070-6 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Mark Comerford, Kurt Falk, Rich Stankewitz, Hiroki Sumi | 4. 巻 36 |
| 2. 論文標題 Uniformly perfect and hereditarily non uniformly perfect analytic and conformal non-autonomous attractor sets | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 631 ~ 655 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/14689367.2021.1975262 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Yuzuru Sato, Rainer Klages | 4. 巻 122 |
| 2. 論文標題 Anomalous Diffusion in Random Dynamical Systems | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Physical Review Letters | 6. 最初と最後の頁 p174101 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevLett.122.174101 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Davide Faranda, Yuzuru Sato, Gabriele Messori, Nicholas R. Moloney, Pascal Yiou | 4. 巻 10 |
| 2. 論文標題 Minimal dynamical systems model of the Northern Hemisphere jet stream via embedding of climate data | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Earth System Dynamics | 6. 最初と最後の頁 555 ~ 567 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5194/esd-10-555-2019 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-------------------------------|
| 1. 著者名 Yoshito Hirata, Yuzuru Sato, Davide Faranda | 4. 巻 30 |
| 2. 論文標題 Permutations uniquely identify states and unknown external forces in non-autonomous dynamical systems | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science | 6. 最初と最後の頁 103103 ~ 103103 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0009450 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|--------------------------|
| 1. 著者名 Toshihiro NAKANISHI | 4. 巻 73 |
| 2. 論文標題 Teichmüller space and the mapping class group of the twice punctured torus | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 1221--1251 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84998499 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Takato Uehara | 4. 巻 224 |
| 2. 論文標題 Automorphism groups of rational surfaces | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra | 6. 最初と最後の頁 411 ~ 422 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.05.013 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Masaaki Wada | 4. 巻 2176 |
| 2. 論文標題 Projective Hausdorff measure for Cantor sets | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 数理解析研究所講究録 | 6. 最初と最後の頁 46--49 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

[学会発表] 計73件 (うち招待講演 46件 / うち国際学会 33件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on C^2 |
| 3. 学会等名 Dynamical systems and systems of equations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on C^2 |
| 3. 学会等名 The 7th International Conference on Random Dynamical Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on C^2 |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究」 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系の諸相」(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random relaxed Newton's methods |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「ランダム力学系・非自励力学系研究の展望：理論と応用」 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Polynomial Automorphisms on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系と関連分野」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 On a gluing construction of K3 surfaces |
| 3. 学会等名 2022年度城崎代数幾何学シンポジウム(招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 On dynamical degrees of birational mappings |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系と関連分野」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 中西敏浩 |
| 2. 発表標題 円周上の曲面束である3次元閉双曲多様体の具体例について |
| 3. 学会等名 東工大複素解析セミナー(招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 中西敏浩 |
| 2. 発表標題 2つ穴あきトーラスのTeichmüller空間とKlein群 |
| 3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー(招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 中西敏浩 |
| 2. 発表標題 おもに種数2の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群について |
| 3. 学会等名 日本数学会年会(特別講演)(招待講演) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 諸澤 俊介 |
| 2. 発表標題 Dynamical system of a sequence of inner composite functions |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系と関連分野」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of the geodesic flow on hyperbolic surfaces |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系と関連分野」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yuzuru Sato |
| 2. 発表標題 Nonlinear stochastic phenomena in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 Hokkaido Summer Institute "Introduction to computational ergodic theory" (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Yuzuru Sato |
| 2. 発表標題 Stochastic chaos in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「ランダム力学系・非自励力学系研究の展望：理論と応用」 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yuzuru Sato |
| 2. 発表標題 Minimal dynamical systems model of the Northern Hemisphere jet stream via embedding of climate data |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「ランダム力学系・非自励力学系研究の展望：理論と応用」 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 H. Sumi |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 Dynamics of (Semi-)Group Actions (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of homological growth rates for hyperbolic surfaces |
| 3. 学会等名 2021年度 冬の力学系研究集会 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Katsuhiko Matsuzaki |
| 2. 発表標題 Weighted cogrowth formula for free groups |
| 3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺 (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Cusp winding spectra for some hyperbolic surfaces |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch, Marc Kesseboehmer, Maik Groeger |
| 2. 発表標題 Hausdorff dimension of escaping sets for Z extensions of expanding interval maps |
| 3. 学会等名 Dynamics of Semigroup actions (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Classification of generic random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of rational maps |
| 3. 学会等名 Thermodynamic Formalism; Applications to Geometry, Number Theory, and Stochastics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Classification of generic random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of rational maps |
| 3. 学会等名 The 2019 Fall Program of Low-Dimensional Dynamics, Shanghai Center for Mathematical Sciences (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 Dynamics of (Semi-)Group Actions (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroki Sumi |
| 2. 発表標題 Classification of generic random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of rational maps |
| 3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「ランダム力学系理論とフラクタル幾何学の研究」(国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Classification of generic random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of rational maps |
| 3. 学会等名 第9回岐阜数理科学研究会(招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Classification of generic random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of rational maps |
| 3. 学会等名 研究集会「エルゴード理論とその周辺」 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random holomorphic dynamical systems associated with analytic families of holomorphic maps |
| 3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「複素力学系の分岐と安定性の研究」(招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Non-uniformly perfect Julia sets of non-autonomous dynamics of unbounded sequences of polynomials |
| 3. 学会等名 2019年度冬の力学系研究集会 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 ランダム複素力学系における様々なランダム性誘起現象とそのメカニズム(日本数学会解析学賞受賞特別講演) |
| 3. 学会等名 2020年度日本数学会秋季総合分科会(招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Non-uniformly perfect Julia sets of non-autonomous dynamics of unbounded sequences of polynomials |
| 3. 学会等名 数理解析研究所共同研究(公開型)「複素力学系理論の総合的研究」(招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 数理解析研究所共同研究「ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究」 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 角大輝 |
| 2. 発表標題 Random Dynamical Systems of Regular Polynomial Maps on \mathbb{C}^2 |
| 3. 学会等名 数理解析研究所共同研究「複素力学系の諸相」(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤謙 |
| 2. 発表標題 Anomalous diffusion in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 DCP19, CNR (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 LML summer school, ICTP (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 ICIAM (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Noise-induced Statistical Periodicity in Lasota-Mackey Maps |
| 3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「ランダム力学系理論とフラクタル幾何学の研究」(招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Anomalous diffusion and intermittency in deterministic /random dynamical systems |
| 3. 学会等名 RIMSworkshop (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 JSIAM |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation and intermittency in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 RIMS workshop |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Anomalous diffusion in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 The Mathematics of Climate and Environment, IHP (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Anomalous diffusion in random dynamical systems |
| 3. 学会等名 Shiga summer school |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 CRITICS workshop 2020 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Noise-induced degeneration in online learning |
| 3. 学会等名 Dynamical systems and machine learning (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic chaos in random dynamical systems and its Applications |
| 3. 学会等名 Mathematical Science of Complex Systems: Physics, Chemistry, Biology, Information and Chaos (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 RIMS workshop on dynamical systems |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Stochastic bifurcation in a turbulent swirling flow |
| 3. 学会等名 Mathematical methods for the studies of flow, shape, and dynamics (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐藤 謙 |
| 2. 発表標題 Existence of multiple noise-induced transitions in Lasota-Mackey map |
| 3. 学会等名 Hokkaido Summer Institute on Computational Ergodic Theory |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 中西敏浩 |
| 2. 発表標題 いくつかのクライン群の例について |
| 3. 学会等名 Workshop on Potential Theory and Complex Analysis (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 中西敏浩 |
| 2. 発表標題 種数 2 の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群の例について |
| 3. 学会等名 函数論シンポジウム (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of Birkhoff averages for non-uniformly expanding Markov interval maps |
| 3. 学会等名 Ergodic theory and dynamical systems seminar of Tata Institute, (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Katsuhiko Matsuzaki |
| 2. 発表標題 Weighted cogrowth formula for free groups |
| 3. 学会等名 Ergodic theory meeting, エルゴード理論とその周辺 (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Cusp winding spectra for some hyperbolic surfaces |
| 3. 学会等名 MSJ Autumn meeting |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch, Marc Kesseboehmer, Maik Groeger |
| 2. 発表標題 Hausdorff dimension of escaping sets for Z extensions of expanding interval maps |
| 3. 学会等名 Dynamics of Semigroup actions (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Mixed Birkhoff spectra of one-dimensional Markov maps |
| 3. 学会等名 MSJ Spring Meeting, Statistics and Probability Session |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of Birkhoff averages for non-uniformly expanding Markov interval maps |
| 3. 学会等名 Kyoto Dynamics Seminar (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of cuspidal windings on hyperbolic surfaces |
| 3. 学会等名 RIMS Online Workshop "Complex Dynamics and Related Topics (招待講演)" |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch and Hiroki Takahasi |
| 2. 発表標題 Mixed Birkhoff spectra of one-dimensional Markov maps |
| 3. 学会等名 RIMS 研究集会「数理学の諸問題と力学系理論の新展開」 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Multifractal analysis of dynamical systems |
| 3. 学会等名 名古屋大学談話会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Dimension gaps in transient dynamics on the real line |
| 3. 学会等名 力学系-新たな理論と応用に向けて(国際学会) |
| 4. 発表年 2019年~2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Spectral gap property for random dynamics on the real line and multifractal analysis of generalised Takagi functions |
| 3. 学会等名 Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry, (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Multifractal formalism for generalised local dimension spectra of Gibbs measures on the real line |
| 3. 学会等名 2019年度日本数学会秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Johannes Jaerisch |
| 2. 発表標題 Recurrent and transient sets for skew-periodic interval maps |
| 3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 Siegel disks for rational surface automorphisms with positive entropy |
| 3. 学会等名 Geometric Complex Analysis on Foliations and Dynamics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 A gluing construction of K3 surfaces |
| 3. 学会等名 Differential Systems: from theory to computer mathematics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 Dynamical degrees of birational maps on complex surfaces |
| 3. 学会等名 Bifurcation and stability in complex dynamics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 On maximal entropy measures for birational maps on compact complex surfaces |
| 3. 学会等名 Complex Dynamics and Related Topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Takato Uehara |
| 2. 発表標題 A gluing construction of projective K3 surfaces |
| 3. 学会等名 Aspects of Complex Dynamics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Masaaki Wada |
| 2. 発表標題 Projective Hausdorff measure |
| 3. 学会等名 Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 和田昌昭 |
| 2. 発表標題 Projective Hausdorff measure |
| 3. 学会等名 Topology and Computer 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|------------------------------------|
| 1. 発表者名 和田昌昭 |
| 2. 発表標題 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング |
| 3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2020 (招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 和田昌昭 |
| 2. 発表標題 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング |
| 3. 学会等名 ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--------------------------------------|
| 1. 発表者名 和田昌昭 |
| 2. 発表標題 Twisted Alexander 多項式の思い出 |
| 3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2021(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

〔図書〕 計1件

| | |
|--------------------------|-----------------|
| 1. 著者名 石崎克也・諸澤俊介 | 4. 発行年 2021年 |
| 2. 出版社 NHK出版 | 5. 総ページ数 229 |
| 3. 書名 数理学 - 離散数理モデル - | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-----------|--|--|----|
| 研究 分担者 | 中西 敏浩 (Nakanishi Toshihiro) (00172354) | 島根大学・学術研究院理工学系・教授 (15201) | |

6. 研究組織（つづき）

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|---|--|----|
| 研究分担者 | 佐藤 譲 (Sato Yuzuru) (30342794) | 北海道大学・電子科学研究所・准教授 (10101) | |
| 研究分担者 | 上原 崇人 (Uehara Takato) (40613261) | 岡山大学・環境生命自然科学学域・准教授 (15301) | |
| 研究分担者 | 諸澤 俊介 (Morosawa Shunsuke) (50220108) | 高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・教授 (16401) | |
| 研究分担者 | イエーリッシュ ヨハネス (Jaerisch Johannes) (90741869) | 名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授 (13901) | |
| 研究分担者 | 和田 昌昭 (Wada Masaaki) (80192821) | 大阪大学・情報科学研究科・教授 (14401) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

| | |
|---|--------------------|
| 国際研究集会 数理解析研究所共同研究（公開型）「ランダム力学系理論とフラクタル幾何学の研究」 | 開催年 2019年～2019年 |
|---|--------------------|

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|---------|--|----------------------|-------------------------------|--|
| | | | | |
| ドイツ | Christian-Albrechts-Universitaet zu Kiel | University of Bremen | Max Planck Institute, Dresden | |
| ポーランド | University in Krakow | | | |
| ブラジル | UFRJ | | | |
| 英国 | University of Reading | | | |

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|---------|---------------------------------|-----------------------|----------------------------|--|
| 米国 | University of North Texas | Ball State University | University of Rhode Island | |
| 英国 | Queen Mary University of London | | | |
| フランス | CNRS | | | |