

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01793

研究課題名（和文）無限粒子系における相転移現象の確率解析

研究課題名（英文）Stochastic analysis for phase transition in particle systems with an infinite number of particles

研究代表者

種村 秀紀（Tanemura, Hideki）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：40217162

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,100,000円

研究成果の概要（和文）：長距離相互作用系を表す無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性について、拡散型粒子系、飛躍型粒子系、剛体球系に対して研究を行い、3つの異なる設定の下で統一的に扱うことができる理論を構築した。その応用として、対応するディリクレ形式の一意性を導いた。
経路に依存する非マルコフ過程の一例であるElephant Random Walk (ERW) についての研究を行い、ERW とその種々の変形モデルについて多角的に研究を推進した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

長距離相互作用をもつ無限粒子系の確率解析において、確率微分方程式によるアプローチは、最も有効な手段の一つである。拡散粒子系、飛躍粒子系、剛体球系に対して、確率微分方程式の解の存在と一意性等を統一的に示したことは、学術的な意義は高い。様々な設定のもとで物理現象などの解析の役立つと思われる。一方、非マルコフ的な確率過程に対しての研究は、様々な方向に発展しているが、得られた研究成果は、過去の影響に大きく影響を及ぼす現象の解析に応用できることが期待できる。

研究成果の概要（英文）：We investigated the existence and uniqueness of strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations representing long-range interacting systems for diffuse particle systems, jump type particle systems, and hard core particle systems. We have developed a theory that can be applied to these different settings. As an application of this, we proved the uniqueness of the corresponding Dirichlet forms.

We conducted research on Elephant Random Walk (ERW), which is an example of a path-dependent non-Markov process, and promoted multifaceted research on ERW and its various deformation models.

研究分野：確率論

キーワード：無限粒子系 ランダム行列 確率微分方程式 相転移 浸透模型 Elephant random walk 行列式点過程

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、 F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

相の定義は分野、研究対象によって様々なものを考えることができるが、無限粒子の配置空間では、粒子密度、周期性などの規則性の強さ、平均密度からのばらつき等が相を定める尺度の例となる。粒子を配置する空間 S は、立方格子 Z^d に代表される離散空間である場合とユークリッド空間 R^d に代表される連続空間とに大別される。離散空間では、様々なグラフ上での粒子系を設定することにより、これまで相転移をもつ確率モデルがについて多くの重要な結果が得られている。一方、ユークリッド空間に代表される連続空間上の粒子配置空間では、離散空間上で起こるような相転移の例はギブス点過程の範疇では知られていない。近年、ランダム行列の研究に大きな進展があり、固有値分布の性質がより詳しく調べられるようになった。成分がランダムである行列を考えると、その固有値分布は複素平面上の点過程となり、さらに行列のサイズを無限大にしたときに固有値分布が収束すれば、極限は無限個の粒子配置空間上の確率分布となる。行列の成分をガウス分布した場合、行列の対称性、尺度変換の方法などにより、正弦点過程、Airy 点過程、Bessel 点過程、ジニブル点過程などの行列式点過程が導かれることが知られている。ここで行列式点過程とは、任意の次数の相関関数が行列式で表現できる点過程のことである。これらの行列式点過程は、相互作用が Ruelle 型ポテンシャルで与えられているギブス点過程とはならないが、相互作用が対数ポテンシャルで与えられる一般化されたギブス点過程（準ギブス点過程）であることが長田氏により示されている。対数ポテンシャルは、極めて強い長距離相互を与えていることから、粒子の配置に強い制限を加えている。ランダム行列から導かれた上述の準ギブス点過程は、長田-白井、Bufetov-Gohsh 等によって剛性をもつことが示されている。剛性とは、有界領域内の粒子の個数が領域の外部の粒子の配置により一意的に定まるという性質である。Ruelle 型ギブス点過程では、外部粒子の配置から内部粒子数が決まることはないため、剛性を持たないことがわかる。

相転移をもつ確率モデルの例としては、浸透過程の研究が盛んに研究されている。連続空間の浸透過程はポアソン点過程に対してこれまでに多くの研究がある。浸透過程は、点の繋がり方を定めるごとに対応するモデルが構成されるが、2点の距離が $r > 0$ 以下であれば繋がっており、 r より大きければ繋がっていないと定義したとき、この浸透モデルはポアソンブーリアンモデルと呼ばれており、これまでに最も研究されている連続浸透モデルの一つである。浸透モデルでは、クラスター、つまり繋がっている点の集まりが無限集合であるとき浸透しているといい、クラスターが有限集合であるとき浸透していないという。ポアソンブーリアンモデルでは、浸透する確率が r の増加関数になることが直ちに分かるが、ある閾値 r_c があって、 $r > r_c$ であれば確率が正になり、 $r < r_c$ では確率が 0 になることも知られている。そして、劣閾値と優閾値のそれぞれの相におけるクラスターのサイズなどが調べられており、さらに閾値の近くでの臨界現象の研究も進んでいる。相転移現象は、その他にも多くの確率モデルに対しても研究されている。

2. 研究の目的

本研究課題では、相転移現象を確率解析の立場から調べることを主目的とする。正弦点過程、Airy 点過程、Bessel 点過程、ジニブル点過程などの行列式点過程を定常分布にもつ確率過程の研究は、研究主題の一つである。そして確率過程を確率解析することにより、定常分布の剛性による結晶構造と対応する確率過程の振る舞いがどのように関連しているかを解明することを目標としている。平衡確率過程の構成については、ディリクレ形式理論を用いて、ある条件のもと

とでの理論が確立させている。非平衡系については、まだ構成された例があまりないので、その構成と解析について研究を進めることも重要な目的である。

浸透過程においてポアソン点過程の代わりにジニブル点過程にした場合は、どうなるかは興味深い問題である。最近、ポアソンブーリアン模型においてポアソン点過程をジニブル点過程に代えて定義された浸透過程に対して、閾値の存在は Ghosh により示されているが、まだ説明されていないことが多くある。また、繋がり方を代えることにより、様々な新しい連続浸透過程を導入することが可能である。配置空間は無次元部分空間であるが、調べる配置空間の位相的性質に応じて浸透過程での繋がり方を決め、浸透過程の性質から配置空間の位相的性質を導き出すことを剛性という性質に対して可能であるかを調べる。浸透過程の繋がり方を定める場合、2点間の距離で定義する場合が一般的であるが、3点以上の関連から繋がり方を定めることもできる。たとえばポロノイ浸透模型では、点の配置から決まる分割に基づいて3点以上の関連から繋がり方を定めている。剛性をうまく捉えられるように、3点(もしくは3点以上)の関連から繋がり方が定まる浸透過程を導入することが解決の鍵となる。

相転移をもつ確率模型は、その他にも多くものが研究されているが、それぞれ場合に相転移現象がどのような理由から起こるかを総合的に調べる研究も目的としている。

3. 研究の方法

準ギブス点過程を定常分布にもつ確率過程は、ある十分条件の下で構成ができ、さらに無限次元確率微分方程式で表すことができることが長田氏(九州大学、中部大)の研究により示されている。その無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性については、長田博文氏と共同研究が進められている。各々の確率モデルに対して、その十分条件を満たすかどうかは鍵になるが、その導出には、平衡分布となる点過程の相関関数の精密な漸近的性質が重要となる。それは、無限粒子系では無限遠点からの影響を考慮する必要あるという理由からである。確率過程の漸近挙動も相関関数の漸近的性質が本質的な影響を与えていることから、その精密な解析が必要となる。

剛性は、領域を大きくしたときの領域内の粒子数の分散の発散のオーダーによって調べることができる。例えばポアソン点過程では面積の2乗であるのに対して、ジニブル点過程では面積の1乗となっており、ばらつきがかなり小さいことが分かる。点過程に関する積率の計算は、相関関数を含む関数の計算、そして相関関数の表現が重要になる。行列式点過程を扱う場合は、相関関数の行列式表現を巧みにつかい、それらの計算を行うことになる。

分担者である今村卓史氏(千葉大学大学院理学研究院)は、可積分確率論の立場から行列式点過程など解析する専門家であり、行列式過程の最新の結果を巧みな計算に基づいて出している。今村氏との共同研究により、求める相関関数の評価を導くアプローチを行う。

分担者である竹居正登氏(横浜国立大学大学院工学研究院)は、浸透模型などの確率模型の確率解析を専門とする研究者であり、最新の浸透過程の結果と技法を習熟している。新たに導入する浸透過程の解析について、有益なアイデアと技術的手法を有している。竹居氏との共同研究により、求める相関関数の評価を導くアプローチを行う。

連続浸透模型の研究の第一人者である Rahul Roy 氏(インド統計研究所)を研究協力者に加えて、浸透模型に関する研究討論を通じ様々な確率模型の構成と解析について共同研究を行う。

4. 研究成果

(1) ブラウン無限粒子系を表す無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性に関する研究を

纏めた論文が Probability Theory and Related Fields (PTRF) にて掲載された (長田氏との共同研究)。一意性が成り立つための十分条件として末尾事象の一意性と各粒子の爆発が起こらないという条件に加えて、IFC (Infinite system of Finite-dimensional SDEs with Consistency) と呼ばれる両立条件を導入した。この条件は、与えられた解が表す無限粒子系のうち有限個の粒子に着目して、その他の粒子を外部環境としたランダムな環境のもとでの有限次元確率微分方程式を考えたとき、その微分方程式の一意性が成り立つという条件である。前述の結果では、この条件にディリクレ形式理論に基づく技法を用いたが、長田氏、河本氏 (福岡歯科大、岡山大学) との共同研究により、ディリクレ形式理論を用いることなく、確率微分方程式による解析により導くことが出来ることを示した。この結果により、扱う無限粒子系の定常性、平衡性などの条件を除くことが可能になり、非平衡系に対して一意性の理論が展開できることとなった。得られた結果は、数学会欧文誌 (JMSJ) に掲載された。さらにブラウン無限粒子系に対応するディリクレ形式の一意性を示すことができ、得られた結果は、Potential Analysis (PA) に掲載された。

- (2) 江崎氏 (福岡大) との共同研究により、飛躍型無限粒子系を表す無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性に関する研究が進展し、各粒子が対称安定過程で駆動する場合には、パラメータ α が $(0, 2)$ のすべての場合に対して適用することができることを示した。鍵の一つは、ブラウン運動で駆動する場合に用いたモーメントに関する条件を除外することに成功したことである。得られた結果を纏めた論文は、数学会欧文誌 (JMSJ) に掲載された。
- (3) ブラウン無限剛体球系に対して、確率微分方程式の解の存在と一意性等を示した。剛体球系はハードコア相互作用をもつ系とみなすことができるが、ハードコア相互作用により、配置空間の変更、反射を表す局所時間項の存在、などの問題点が生じる。これらの問題点を連続浸透模型でのクラスターサイズの評価等を用いて解決をした。得られた結果を纏めた論文は、Proceedings of International Workshop on Dirichlet Forms and Related Topics に掲載された。
- (4) エルミート多項式の精密な評価を用いて、有限粒子系から無限粒子系の収束を示し、そのソフトエッジ型極限の方程式の形が決まることを厳密に導いた。その証明で鍵となる相関関数の評価は一様性と精密性が高い新しいもので、関連研究でも適用が期待できる。ソフトエッジ型極限の方程式 (Airy 型無限粒子系) の導出のためには、エルミート多項式の精密な評価が必要である。Deift 等の漸近評価を適用することにより、Airy 点過程に対する相関関数等の極めて精密な一様な評価を導き、有限粒子系から無限粒子系への収束を示した。結果は、2022 年 12 月に行われた研究集会「大規模相互作用系の確率解析」にて発表された (長田氏との共同研究)。
- (5) 竹居氏、Rahul Roy 氏との共同により、経路に依存する非マルコフ過程の一例である Elephant Random Walk (ERW) についての研究を行った。過去の記憶の選び方が冪分布に従い、正の方向に進むか同じ位置に止まるかを決定するというモデルを導入し、冪指数 α と進む確率 p を変えることにより 3 つの相が現れることを示し、各々の相での ERW の漸近挙動を示した。さらに閾値での振る舞いも決定した。また、array 型の elephant random walk における相転移を解明し、各相での極限定理について結果を得た。さらに、2 つの独立な elephant random walk の出会う回数についても研究し、有限回か無限回かどうかが記憶パラメータ $3/4$ を境に異なることを示した。結果は、2023 年 10 月に行われた研究集会「The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interaction Systems」等で発表された。
- (6) 分担者の今村氏は、KPZ モデルという興味深い解析が難しいモデルを、行列式点過程とい

う、相関関数の構造が明快なモデルを用いて研究できることを示した。また、具体的な関連性は明らかにされて来なかった q -Whittaker 測度と何らかの行列式点過程との関連性を q -Whittaker 測度に従うヤング図形の第一成分と周期的 Schur 測度と呼ばれる行列式点過程に従うヤング図形の第一成分との間の関係式を得ることにより明らかにした (Maccioni 氏と笹本氏との共同研究)。得られた結果を纏めた論文は、Journal of Mathematical Physics に掲載された。

- (7) Rahul Roy 氏との共同研究により、多種類粒子系で、同種類のクラスターが大きくなると、より新しい同種の粒子が集まりやすいという相互作用をもつ確率モデルを導入し、解析を行った。このモデルにおいては、粒子の死滅、生存だけでなく、生存の形態が多々あることを示した。1つは有限種類の粒子が生き残る場合、もう一つは無限種類の粒子が生き残るという場合である。さらに、無限種類の粒子の生存も局所的に集中する場合と広範囲に広がる場合があることも導き、生存の形態のさらなる細かい分類も示すことができた。これは、複数の相転移現象が起きることを意味している。彫られた結果は、2023年6月に行われた研究集会「Boston-Keio-Tsinghua Workshop 2023 Probability and Statistics」等で発表された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 Esaki, S., Tanemura, H.	4. 巻 76
2. 論文標題 Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump type with long range interactions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 283-336
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/90289028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tanemura, H.	4. 巻 394
2. 論文標題 Infinite Particle Systems with Hard-Core and Long-Range Interaction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 511-534
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-19-4672-1_25	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kawamoto, Y., Osada, H., Tanemura H.	4. 巻 74
2. 論文標題 Infinite dimensional stochastic differential equations and tail α -fields II: the IFC condition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 79-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/85118511	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kawamoto, Y., Osada, H., Tanemura H.	4. 巻 55
2. 論文標題 Uniqueness of Dirichlet forms related to infinite systems of interacting Brownian motions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Potential Anal.	6. 最初と最後の頁 639--676
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11118-020-09872-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Osada, H., Tanemura, H.	4. 巻 177
2. 論文標題 Infinite dimensional stochastic differential equations and tail α -fields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 1137-1242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00440-020-0098-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hayashi M., Oshiro S., Takei M.	4. 巻 2023
2. 論文標題 Rate of moment convergence in the central limit theorem for the elephant random walk	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment	6. 最初と最後の頁 23202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-5468/acb265	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kubota N., Takei M.	4. 巻 14
2. 論文標題 Comparison of limit shapes for Bernoulli first-passage percolation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics for Industry	6. 最初と最後の頁 2250005
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S2661335222500058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takei, M.	4. 巻 26
2. 論文標題 Almost sure behavior of linearly edge-reinforced random walks on the half-line	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/21-ejp674	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Imamura, T., Mucciconi, M., Sasamoto, T.	4. 巻 Pi 11(e27)
2. 論文標題 Skew RSK dynamics: Greene invariants, affine crystals and applications to q-Whittaker polynomials	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1--101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fmp.2023.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Imamura, T., Mucciconi, M., Sasamoto, T.	4. 巻 64
2. 論文標題 New approach to KPZ models through free fermions at positive	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 83301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0089778	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 Tanemura, H.
2. 発表標題 Phase transition for a unidirectional elephant random walk with a power law memory
3. 学会等名 Interacting particle systems and SPDEs China-Japan Probability Workshop at BIMSA and YMSC (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Variations of elephant random walks: With a power law memory and with gradually increasing memory
3. 学会等名 新潟確率論ワークショップ
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Imamura, T.
2. 発表標題 Refined Cauchy/Littlewood identities and their applications to KPZ models
3. 学会等名 French Japanese Conference on Probability & Interactions (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tanemura, H.
2. 発表標題 On a model of evolution of subspecies
3. 学会等名 Boston-Keio-Tsinghua Workshop 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tanemura, H.
2. 発表標題 Elephant random walk with a power law memory
3. 学会等名 The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interaction Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 種村秀紀
2. 発表標題 Phase transition for a unidirectional elephant random walk with a power law memory
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XVII
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Bernoulli first-passage percolationにおける極限形状の比較
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Imamura, T.
2. 発表標題 KPZ models and free fermions
3. 学会等名 Random Operators and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Imamura, T.
2. 発表標題 Exactly solvable KPZ models and free fermions
3. 学会等名 28th International Conference on Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 種村秀紀
2. 発表標題 Strong asymptotics of Hermite polynomial
3. 学会等名 第20回 大規模相互作用系の確率解析 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tanemura, H.
2. 発表標題 Infinite particle systems with hard core and long range interaction
3. 学会等名 International workshop on Dirichlet Forms and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Elephant random walkに対する極限定理
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 ernoulli first-passage percolationにおける極限形状の比較
3. 学会等名 第20回 大規模相互作用系の確率解析 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Random walks with step-reinforcement
3. 学会等名 Crossroad of Statistical Physics and Probability Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 KPZ models and free fermions at finite temperature
3. 学会等名 統計力学セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 RSK approaches to integrable probability
3. 学会等名 MATRIX/RIMS tandem workshop, Integrability, combinatorics and representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 今村卓史
2. 発表標題 Exact analyses of the KPZ models by the periodic and free boundary Schur measures
3. 学会等名 Random Matrix EurAsia 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tanemura, H.
2. 発表標題 Stochastic differential equations for infinite particle systems of jump type with long range interactions
3. 学会等名 Bernoulli-IMS 10th World Congress in Probability and Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹居正登
2. 発表標題 Elephant random walkに対する中心極限定理におけるモーメント収束の速さについて
3. 学会等名 第19回 大規模相互作用系の確率解析 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Imamura, T.
2. 発表標題 Mapping KPZ models to free fermions at positive temperature
3. 学会等名 Bernoulli- IMS 10th World Congress in Probability and Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 種村 秀紀
2. 発表標題 On a model of evolution of subspecies
3. 学会等名 The 18th " Stochastic Analysis on Large Scale Interaction Systems " (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	竹居 正登 (Takei Masato) (60460789)	横浜国立大学・大学院工学研究院・教授 (12701)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	今村 卓史 (Imamura Takashi) (70538280)	千葉大学・大学院理学研究院・教授 (12501)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
インド	インド統計研究所			