

令和 5 年 5 月 6 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19H01800

研究課題名(和文) 臨界型変分問題における領域の幾何の影響-解空間大域構造とコンパクト性喪失機構-

研究課題名(英文) The influence of domains on the variational problems of critical type: global structures of solution spaces and the mechanism of the loss of compactness

研究代表者

高橋 太 (Takahashi, Futoshi)

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、近似解の列の相対コンパクト性がアприオリには成り立たない「臨界型変分問題」を取り扱い、解空間の大域的構造及び近似解の列がコンパクト性を喪失する機序について研究を行った。特に領域の境界の曲率や形状、滑らかさなどの微分幾何学的性質の影響について、Hardy型不等式やTrudinger-Moser型不等式に付随する変分問題を中心に研究を行い、コンパクト性喪失メカニズムと領域の幾何との相関に関して新規な成果を得た。また、制約条件付きベクトル場に対するHardy-Leray不等式の最良定数についても結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題では、臨界型変分問題の解空間の大域的構造やエネルギー汎関数の非コンパクト性が、領域の境界の曲率や領域の形状、滑らかさなどの微分幾何学的性質とどのように関係するのかを定量的に解明することを目的とした。臨界型変分問題の代表例であるHardy不等式やSobolev不等式などの関数不等式の最良定数に関わる変分問題は、それら関数不等式が解析学の広範な分野で基本的道具として使用されていることを鑑みると、その重要性は論を俟たない。また、関数列の(非)コンパクト性という解析的性質と領域の幾何学的性質の相関の解明は、工学や数値解析などの分野でも重要であろう。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we concern the variational problems of critical type, in which the relative compactness of approximating solutions does not hold a priori, and studied the global structure of solution spaces and the mechanism of loss of compactness of approximating sequences. In particular, we mainly treated variational problems related with Hardy and Trudinger-Moser inequalities and obtained novel results concerning the effect of domains (curvature, shape, smoothness, etc.) on the mechanism of loss of compactness. Also we studied Hardy-Leray inequalities for vector fields under differential constraints (curl-free, or solenoidal) and obtain new results.

研究分野：変分法

キーワード：臨界型変分問題 非コンパクト性 爆発解析 Hardy不等式 Trudinger-Moser不等式

1. 研究開始当初の背景

一般に「臨界型変分問題」とは、その付随するエネルギー汎関数(変分汎関数)が、Palais-Smaleの意味でのコンパクト性条件をアプリアリにみたすとは限らないために、変分法の直接法や「峠の補題」の援用といった古典的な変分法による取り扱いが困難な変分問題のことをいう。Sobolev 不等式や Hardy 不等式、Trudinger-Moser 不等式などの解析学における一連の基本不等式は、考察する関数空間に属するすべての関数について、その可微分性と可積分性のバランスを不等式の形で明示するものである一方、不等式に現れる最良定数に対する最小化列や近似解の列が許容関数空間の中でアプリアリには相対コンパクト列になるとは限らない臨界型変分問題の代表例でもある。Palais-Smale コンパクト性条件が破れる際の詳しいメカニズムについては、1980 年代に始まる P.L.Lions, Struwe, Brezis 等による研究によってその解析が進展し、非コンパクトな解の列、より一般には非コンパクトな Palais-Smale 列や最小化列は、『エネルギー汎関数に作用する非コンパクトな群による変換に沿って、量子化された単位量ずつの質量やエネルギーを流出させながらコンパクト性を喪失していく』という描像が理解されるようになった。「臨界型変分問題に起こる非コンパクト性の原因は集中現象と消失現象である」ことを喝破した Lions の「凝集コンパクト性原理」は、現在、解析学の主導的原理の一つとして楕円型方程式論に限らない広範な応用を持つに至っている。この凝集コンパクト性原理は、後に Struwe によって集中や平行移動による消失とは逆のスケール変換・平行移動変換を関数列に施して、順次その差を考えるとという階層的な議論に基づく「大域コンパクト性原理」の形にまで洗練され、現在では、Palais-Smale 列とは限らない一般のノルム有界列に対する「プロファイル分解」が解析学の諸分野で広く応用され始めている。一方、個別の問題の中には、一般論としての「凝集コンパクト性原理」「大域コンパクト性原理」の単純な適用だけでは手に負えず、その解決のためには新しいアイデアと解析技術が必要とされるであろう長く未解決な問題も多く存在している状況である。

2. 研究の目的

Sobolev 不等式や Hardy 不等式、Trudinger-Moser 不等式などの解析学における一連の基本不等式は、考察する関数空間に属するすべての関数について、その可微分性と可積分性のバランスを不等式の形で明示するものである一方、不等式に現れる最良定数に対する最小化列や近似解の列が許容関数空間の中でアプリアリには相対コンパクト列になるとは限らない臨界型変分問題の代表例でもある。本研究課題の目的は、種々の解析学の基本不等式に関わる臨界型変分問題において、領域の境界の曲率や形状、滑らかさ・特異性などの幾何学的性質が、付随する変分汎関数の臨界点集合の大域的構造やその非コンパクト性にどのように影響するのかを、偏微分方程式論的手法と微分幾何学的手法を駆使して定量的に明らかにすることである。

3. 研究の方法

臨界型変分問題においては、その解空間の構造を調べる手法として「爆発解析」の方法が強力である。一般に、方程式に適合したスケールリングによって非コンパクトな(近似)解の列がコンパクト性を喪失する状況を解析する手法を爆発解析と呼ぶ。爆発解の列は、領域上の測度ゼロの集合上にデルタ関数的に質量を凝集させ、コンパクト性を喪失していく。領域が滑らかな場合は、その質量の凝集する点(爆発点)の位置は、領域のグリーン関数から定まるロバン関数またはハミルトニアンと呼ばれる関数の臨界点となることが知られている。

例えば有界領域上の臨界 Sobolev 不等式的最良定数を定める最小化問題の最小化列は、領域のグリーン関数から定まる Robin 関数と呼ばれる関数の最小点に集中することでコンパクト性を喪失し、強収束しない。爆発解析によって、爆発点の特徴づけが得られ、Pohozaev 型の積分恒等式を用いることで L^∞ ノルムが無限大となる際の詳細な漸近挙動も得られる。本研究課題でも主な研究方法として爆発解析の方法を採用する。爆発解析を行う際には、その極限方程式の解析が最も重要である。爆発点が内点の場合は全空間で定義された極限方程式が、滑らかな境界上の一点である場合は半空間上の極限方程式が得られる。これら極限方程式の解の定性的性質は爆発解析にとって決定的に重要であるが、たとえば定義領域が滑らかではなく、その爆発点の位置が領域のカド点などの場合、どのようなスケール変換で極限方程式を考察するかも自明ではなく、滑らかでない特異領域上での爆発解析は現在まで多くは行われていない。一方、滑らかさを全く仮定しない有界領域では、最も基本的な Rellich のコンパクト埋め込み定理さえ不成立であるが、このような一般領域上で、非コンパクトな最小化問題の最小化列がどのような機序でコンパクト性を失うのか、また、その非コンパクト性と領域の特異性がどのように関係しているのか、について、爆発解析と幾何学的諸量を用いて定量的に説明する試みは現在

のところ見当たらない。例えば、滑らかな有界領域ではロバン関数の最小点は領域の内点となり、指数が十分に臨界指数に近い「近臨界」 Sobolev 型方程式の最小エネルギー解の爆発点も必ず内点となるが、ロバン関数の最小点が境界上に位置する「野性的」な領域が知られている。そのような野性的な領域上での近臨界 Sobolev 型方程式について、劣臨界指数から指数を臨界指数に近づけた場合の爆発解析が Pistoia-Rey (CVPDE, 2003) によって行われているものの、他の臨界変分構造を持つ楕円型方程式の場合には、その爆発点の位置について、多くのことは知られていないようである。

以上の状況から、本研究課題では、集中・消失現象を起こす非コンパクトな臨界型変分問題において、その解空間の大域的構造、及びコンパクト性喪失メカニズムと領域の幾何の相関を爆発解析と微分幾何学的手法を融合した視点から解析する。

4 . 研究成果

本研究課題推進中の4年間で、研究代表者は計17本の学術論文(うち4本が国際共同研究論文)を発表し、内外の研究集会・セミナーで計19回の招待講演(うち4回が国際研究集会での講演)を行い、研究成果発表に尽力した。この期間中の研究成果として、(1)臨界 Hardy 不等式と調和移植との関係(研究分担者・佐野めぐみ氏との共同研究)(2)渦無しまたは湧き出し無しベクトル場に対するシャープ Hardy-Leray 不等式の最良定数の研究(濱本直樹氏との共同研究)(3)1次元分数べき Trudinger-Moser 不等式の研究(4)Finsler ラプラシアンにより駆動される楕円型方程式の解の漸近解析と各種不等式への応用(Sadaf Habibi 氏との共同研究)がある。佐野氏、濱本氏は研究代表者・高橋の下で学位を取得した元学生、Habibi 氏は現在、大阪公立大学の博士課程に在学中の学生である。このうちベクトル場に対する Hardy-Leray 不等式は Cazacu, Flynn, Lam たち海外研究グループの興味を引き、「制約条件付きベクトル場に対する Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式、不確定性原理不等式の研究」という、新しい数学研究の分野を創始する契機となった。また、分数べき Sobolev 空間 $H^{1/2}$ をベースとする1次元 Trudinger-Moser 不等式の研究は Martinazzi, Mancini たちイタリアの研究者の注目を引き、本研究計画中に彼らを複数回日本に招聘する契機ともなった。さらに、臨界 Hardy 不等式は境界からの距離型 Hardy 不等式と類似の性質を持つことが以前より知られていたが、J. Byeon 氏、佐野めぐみ氏らとの共同研究によって、その最良定数の達成可能性・不可能性と領域の幾何との相関についてかなり詳しい描像が描けるようになった。これは本研究課題で設定されていた最も主要な問題に、臨界 hardy 不等式の最良定数に関わる最小化問題という具体的な例ではあるが、簡潔な回答を与えた成果と考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S. Habibi, and F. Takahashi	4. 巻 42
2. 論文標題 Asymptotic behavior of least energy solutions to the Finsler Lane-Emden problem with large exponents	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 5063--5086
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2022086	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M. Sano, and F. Takahashi	4. 巻 61
2. 論文標題 Critical Hardy inequality on the half-space via the harmonic transplantation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1--33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-022-02265-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Habibi, and F. Takahashi	4. 巻 3
2. 論文標題 Applications of p -harmonic transplantation for functional inequalities involving a Finsler norm	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1--17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-022-00168-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 N. Hamamoto, and F. Takahashi	4. 巻 280
2. 論文標題 Sharp Hardy-Leray inequality for curl-free fields with a remainder term	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1--24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2020.108790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hamamoto, and F. Takahashi	4. 巻 379
2. 論文標題 Sharp Hardy-Leray and Rellich-Leray inequalities for curl-free vector fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 719--742
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01945-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hamamoto, and F. Takahashi	4. 巻 24
2. 論文標題 Best constant of the critical Hardy-Leray inequality for curl-free fields in two dimension	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Math. Inequalities & Applications	6. 最初と最後の頁 399--404
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/mia-2021-24-27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Takahashi	4. 巻 34
2. 論文標題 Topics of stable solutions to elliptic equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 35--59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/457	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Daisuke, and F. Takahashi	4. 巻 47
2. 論文標題 A note on radial solutions to the critical Lane-Emden equation with a variable coefficient	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's(Springer INdAM Series)	6. 最初と最後の頁 273--290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-73363-6_13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hamamoto, F. Takahashi	4. 巻 19
2. 論文標題 Sharp Hardy-Leray inequality for three-dimensional solenoidal fields with axisymmetric swirl	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications of Pure and Applied Anal.	6. 最初と最後の頁 3209--3222
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2020139	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Akayama, F. Takahashi	4. 巻 82
2. 論文標題 A characterization of differentiability for the best trace Sobolev constant function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 87--101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Mercaldo, M. Sano, F. Takahashi	4. 巻 293
2. 論文標題 Finsler Hardy inequalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2370--2398
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201900117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hamamoto, F. Takahashi	4. 巻 280
2. 論文標題 Sharp Hardy-Leray inequality for curl-free fields with a remainder term	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1--24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2020.108790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Hamamoto, F. Takahashi	4. 巻 379
2. 論文標題 Sharp Hardy-Leray and Rellich-Leray inequalities for curl-free vector fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 719--742
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01945-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Alvino, A. Ferone, A. Mercaldo, F. Takahashi, and R. Volpicelli	4. 巻 470
2. 論文標題 Finsler Hardy-Kato's inequality	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Applications	6. 最初と最後の頁 360--374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.10.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Takahashi	4. 巻 8
2. 論文標題 Critical and subcritical fractional Trudinger-Moser type inequalities on \mathbb{R}^N	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 868--884
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/anona-2017-0116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Sano, and F. Takahashi	4. 巻 98
2. 論文標題 Weighted Hardy's inequality in a limiting case and the perturbed Kolmogorov equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 1875--1888
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2018.1471208	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 J. Byeon, and F. Takahashi	4. 巻 21
2. 論文標題 Hardy's inequality in a limiting case on general bounded domains	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Math.	6. 最初と最後の頁 1--24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219199718500700	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 高橋太
2. 発表標題 Hardy 不等式に関連する数学解析
3. 学会等名 日本数学会函数方程式論分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱本直樹・高橋太
2. 発表標題 「渦無し場に対する Rellich-Hardy 不等式の最良定数」
3. 学会等名 日本数学会2020年秋季総合分科会 (熊本大学) 函数方程式論分科会講演
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	加藤 信 (Kato Shin) (10243354)	大阪公立大学・大学院理学研究科・准教授 (24405)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	石渡 通徳 (Ishiwata Michinori) (30350458)	大阪大学・基礎工学研究科・教授 (14401)	
研究分担者	猪奥 倫左 (Ioku Norisuke) (50624607)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	
研究分担者	高津 飛鳥 (Takatsu Asuka) (90623554)	東京都立大学・理学研究科・准教授 (22604)	
研究分担者	橋詰 雅斗 (Hashizume Masato) (20836712)	広島大学・先進理工系科学研究科（理）・助教 (15401)	
研究分担者	佐野 めぐみ (Saano Megumi) (70834935)	広島大学・先進理工系科学研究科（工）・准教授 (15401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	ナポリ・パルテノーブ大学	ミラノ大学	ローマ大学ラ・サピエンツァ	他1機関
韓国	KAIST			