

**臨界型非線形数理モデルにおける高次数理解析法の創造**  
Creation of advanced method in mathematical analysis  
on nonlinear mathematical models of critical type



課題番号：19H05597

小川卓克（OGAWA Takayoshi）

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究の概要（4行以内）

非線型発展方程式で記述される数理モデルに対して、系の持つ分散・消散性と非線型不安定性の拮抗による解析的な「臨界性」とその背後に隠れた数理を探索し、高次の非線形構造の解明と臨界性の解析構造の探求を行う。

研究分野：実解析学、応用解析学、変分法、非線型発展方程式論

キーワード：非線型分散型方程式、移流拡散方程式、臨界最大正則性、流体方程式

1. 研究開始当初の背景

数理モデルの多くは未知関数の相互作用による非線型偏微分方程式で記述され、線形偏微分作用素に起因する「消散分散構造」と、物理量の干渉に起因する「非線型構造」を含む。これら「線型安定化」構造と「非線型不安定」構造がつり合う問題を「臨界問題」と呼び様々な臨界指数が登場する。数学的にも応用上も重要な問題の多くで、こうした臨界状況が発生し、興味深い数学的現象が現れる。また臨界状況では解析学的に主要な技法である「摂動法」がそのままでは通用しないため解析学的な研究はより困難となる。本研究はこうした臨界性にまつわる高次非線形構造を研究し、その背後に残されている優臨界問題への足がかりを築くことにある。

2. 研究の目的

偏微分方程式の解の適切性を基軸に、解がもたらす特異性・正則性・漸近的挙動を臨界性を基軸に研究し、臨界の中の臨界とも思える、高次の非線形干渉に適用できる、桁落ちの特異性あるいは正則性を研究する。応用上も重要な多くの問題で、臨界状況が発生し、興味深い数学的現象が現れる。臨界状況では主要な技法である「摂動法」がそのままでは通用しないため、臨界不等式や端点最大正則性など、通常より高精度な函数不等式を開発し、臨界性にまつわる問題を研究する。

3. 研究の方法

質量保存則、運動量保存則、エネルギー、

エントロピー保存則、ガリレイ変換普遍性などに加えて、数学的な等角・擬等角保存則といった構造を伴い、それらの無限次元空間内での挙動を詳しく知ることが問題の解決に大いに寄与する。そして無限次元空間内での汎函数の幾何学的状況を把握し、拮抗する状況がどのような構造により引き起こされるかを研究する。さらに、汎用函数不等式の方法では得られない臨界型函数不等式や放物型問題に対する端点最大正則性を研究し、臨界問題に適用する。そのため函数解析学による函数空間の理解と同時に、不等式の精密化に寄与する実解析学・フーリエ解析の緻密な議論（実補間理論・ウェーブレット理論）を援用し、様々な臨界型函数不等式を確立する。

4. これまでの成果

(I) 非線形消散分散型問題の臨界指数  
非線形シュレディンガー方程式は、チャージ（質量）とエネルギーが保存する保存則としての構造が顕著な非線形分散型偏微分方程式であるが、非線形項の係数に負の虚数成分が含まれる場合に消散効果が加わり、チャージやエネルギーの保存則が崩れ、エネルギー消散が発生する。佐藤拓也氏（東北大・博士課程）と共同で、この問題の消散構造と分散構造が非線形効果に応じて拮抗する構造を研究し、消散効果がない場合の非線形散乱理論の臨界指数である、バラブ・小澤臨界指数において、解のチャージ減衰が発生すること、およびその減衰次数が解の高い正則性に強く影響されることを証明

した([8])。

#### (II) 圧縮性粘性流体の臨界非適切性

流体方程式の強い解の安定性を示すことを適切性と呼ぶが、等温状態における圧縮性ナビエ・ストークス方程式のスケール臨界での適切性は可積分指数が次元の二倍を境目にして適切・非適切が分かれる。その二倍ちょうどでの解の安定性を議論し、時刻ゼロ近傍で解が発散しうること示して非適切性を示した[1]。この場合二つの非線形項が拮抗し適切性の分析により高次の構造を展開により求める必要が発生する。

#### (III) 端点最大正則性の展開と応用:

最大正則性は、放物型初期値問題の外力の持つ時空正則性(時間と空間方向の可積分性)に対して、解の時間空間微分そのものの時空正則性を問う問題で、準線形発展方程式や流体の自由境界問題、さらには主要部が消え去る特異摂動問題において強力な技法を提供する([7], [11])。圧縮性・非圧縮性粘性流体の適切性や非圧縮性粘性流体の自由境界問題などへの応用が期待される。境界を持つ設定において、Fujita-Kato 流の臨界問題に適用するためには時間絶対可積分における端点最大正則性を確立する必要があるが、そこでは一般論が破綻するため各論によって議論する必要がある。本研究ではユークリッド空間の半空間における熱方程式の非斉次初期値・ディリクレ境界値問題およびノイマン境界値問題を考察し、それぞれの場合に時間  $L^1$  に対する最適な最大正則性を確立した。また端点最大正則性として融解平均振動での最大正則性を証明した([2], [4], [6])。

#### 5. 今後の計画

時間端点指数を含む放物型偏微分方程式の最大正則性の確立、特に圧縮性・非圧縮性粘性流体方程式の自由境界問題に対して、底のない大洋問題(非有界領域)への適用はすぐにでも応用が可能と思われる問題である。非圧縮性問題に対する結果の概要は現時点で得つつあるが、より現実的な設定である、重力下での表面張力を含んだ場合の系の時間大域的安定性(適切性)の研究を川島教授・清水教授と進める。

また非線形分散型問題の初期値境界値門だの漸近解析に放物型で用いた技法が適用可能かの検討を含めて林教授と行う。

さらに移流拡散方程式において対流拡散方程式に対して行った空間遠方で減衰しない関数空間での適切性の議論を元に質量保存則が破綻する場合の、系の安定的な可解

性や、特異摂動の結果を、新しい端点最大正則性を確立することにより研究する。

#### 6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

- [1] T. Iwabuchi, T. Ogawa, Ill-posedness for initial value problem for the barotropic compressible Navier–Stokes equation in Besov spaces, *J. Math. Soc. Japan*, to appear. (査読有)
- [2] T. Ogawa, S. Shimizu, Maximal regularity to the Cauchy problem of the heat equation in BMO, *Math Nachr.*, to appear. (査読有)
- [3] M. R. Haque, N. Ioku, T. Ogawa, R. Sato, Well-posedness for the Cauchy problem of convection–diffusion equations in the critical uniformly local Lebesgue spaces, *Differential Integral Equations* 34 (2021), 223–244. (査読有)
- [4] T. Ogawa, S. Shimizu, Global well-posedness for incompressible Navier–Stokes equations in the critical Besov spaces under the Lagrangian coordinate, *J. Differential Equations* 274 (2021) 613–651. (査読有)
- [5] T. Matsui, R. Nakasato, T. Ogawa, Singular limit for the magnetohydrodynamics of the damped wave type in the critical Fourier–Sobolev space, *J. Differential Equations* 271 (2021) 414–446. (査読有)
- [6] T. Ogawa, S. Shimizu, Maximal  $L^1$ -regularity for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data in the half-space, *Proc. Japan Acad.* 96 Ser. A (2020), 57–62. (査読有)
- [7] M. Kurokiba, T. Ogawa, Singular limit problem for the two-dimensional Keller–Segel system in scaling critical space, *J. Differential Equations* 269 (2020) 8959–8997. (査読有)
- [8] T. Ogawa, T. Sato,  $L^2$ -decay rate for the critical nonlinear Schrödinger equation with a small smooth data, *Nonlinear Differ. Equ Appl.* 27 (2020) No. 18, pp.20. (査読有)
- [9] N. Hayashi, E. I. Kaikina, T. Ogawa, Dirichlet-boundary value problem for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with large initial and boundary data, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 27 (2020), no. 2, Paper No. 17, 20 pp. (査読有)
- [10] T. Ogawa, T. Sato, Analytic smoothing effect for system of nonlinear Schrödinger equations with general mass resonance, *Hiroshima Math. J.*, 50 (2020), no. 1, 73–84. (査読有)
- [11] M. Kurokiba, T. Ogawa, Singular limit problem for the Keller–Segel system and drift–diffusion system in scaling critical spaces, *J. Evol. Equations* 20 (2020) 421–457. (査読有)
- [12] 小川卓克 **日本数学会 秋季賞** 受賞題目「非線形発展方程式における臨界構造の研究」  
2019年 9月 17日 日本数学会

#### 7. ホームページ等

<http://web.tohoku.ac.jp/ogawa/index.html>