

令和 5 年 5 月 15 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K02737

研究課題名（和文）中等教育における「相互発達モデル」に基づく数学科授業に関する開発的研究

研究課題名（英文）The developmental research on the design of mathematical lessons based on Mutual Development Model in the secondary school

研究代表者

山口 武志（Yamaguchi, Takeshi）

鹿児島大学・法文教育学域教育学系・教授

研究者番号：60239895

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、数学的意味の協定と数学的表現の協定の2つを社会的相互作用の機能と捉えた上で、社会的相互作用を基軸とする授業デザインの枠組み及び授業改善を提起するものである。本研究の主な成果は、次の2点になる。

第一は、これまでの研究において研究代表者が理論的に提起した「数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル」（相互発達モデル）をもとに、中学校第2学年「箱ひげ図」に関する授業モデルを策定したことである。第二は、第一の研究と同様の研究方法によって、高等学校・数学I「三角比」及び数学II「三角関数」に関する授業モデルを策定したことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多くの教師は、授業の「練り上げ」段階における社会的相互作用の重要性を認識してはいるものの、その具体化において悩みやジレンマを抱えている。こうした課題に対して、本研究の学術的意義や社会的意義は、「数学的意味の協定」と「数学的表現の協定」の2つを社会的相互作用の重要な機能と捉えた上で、「相互発達モデル」をもとに、箱ひげ図や三角比、三角関数に関する授業モデルを考察した点にある。本研究をもとに、「社会的相互作用」や「慣例的表現との接続」を視点とした算数・数学科の授業の具体化が可能になると考えている。

研究成果の概要（英文）： This research aims to develop the theoretical framework for designing teaching and learning process of mathematics which focuses on significant roles of social interactions: negotiation of meaning and negotiation of representation. Main findings of this research are summarized as the following two points.

Firstly, lesson plans of 'box-and-whisker plot' which was taught at the second grade in the junior high school were designed in terms of 'model of mutual development of mathematical meaning and mathematical representation (Mutual Development Model)' proposed in the previous research. Secondly, by a similar research method, lesson plans of 'trigonometric ratio' and 'trigonometric function' which were taught in the high school were also designed in terms of 'Mutual Development Model.'

研究分野：算数・数学教育

キーワード：相互発達モデル 社会的相互作用

1. 研究開始当初の背景

(1) 今日、算数・数学科の多くの授業では、児童・生徒の多様な考えに基づく「社会的相互作用 (social interaction)」の過程が重視されている。それは、実践的には、「練り上げ」の過程にかかわる重要なものである。しかし、実際の授業では、問題解決学習の文脈のもとで、社会的相互作用の過程が形骸化し、その結果、児童・生徒の多様な考えを十分に生かすことができないまま、教師側から知識を一方向的に押しつけてしまう場合も決して少なくない。

社会的相互作用にかかわる数学教育研究としては、構成主義、相互作用主義、社会文化主義といった各種の認識論に基づく研究があげられる。こうした認識論的研究では、次の2つが課題になっている。第一の課題は、上述の3つの認識論の「協応」(coordination)に関する課題である。3つの認識論については、数学的知識の客観性の捉え方などにおいて激しい対立点があり、算数・数学科の授業づくりにおける3つの認識論の位置づけ方が議論となっている(中原, 1999)。第二の課題は、3つの認識論と授業実践との架橋をめぐる課題である(山口, 2012)。3つの認識論はあくまでも哲学的・理論的なものであり、それらを基盤とした算数・数学科における具体的な教材研究、授業づくりは今後の大きな課題として残されている。

(2) 数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル (相互発達モデル)

上記のような理論的、実践的課題を解決するために、研究代表者は、構成主義、社会文化主義、相互作用主義にかかわる認識論的研究や、算数・数学学習の記号論的研究、RME理論といった国内外の先行研究を批判的に検討した上で、「数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル」(以下、相互発達モデル、図1；山口, 2016)を理論的に提起している。

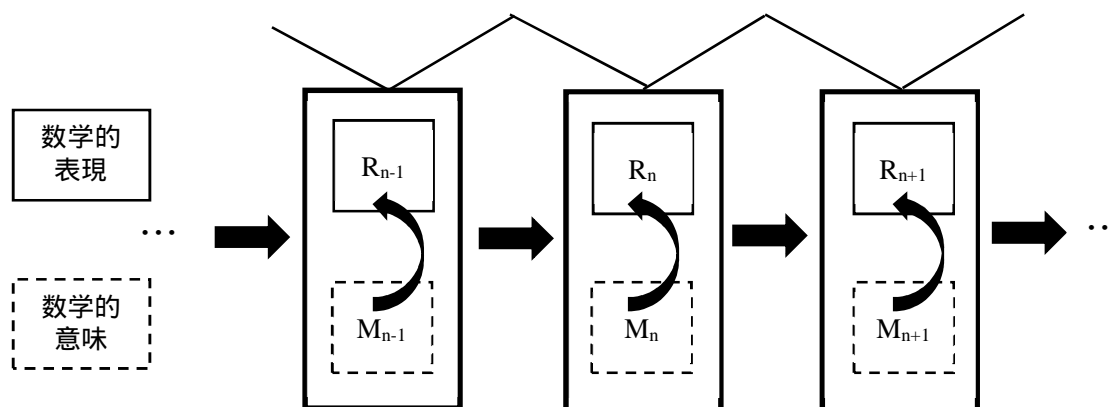


図1 数学的意味と数学的表現の相互発達に関するモデル (相互発達モデル) (山口, 2016)

この相互発達モデルは、構成主義、社会文化主義、相互作用主義の3つの認識論の協応を認識論的基盤とするものであり、以下の4つの基本的特性をふまえたものである。

- 特性1：シンボル化を基盤とした「意味と表現に関する基本ユニット」
- 特性2：意味と表現の対象化及び能記性・所記性
- 特性3：意味と表現に関する3つの水準 (意味と表現の連続的移行)
- 特性4：シンボル化された表現の専有、道具化

特性1は、数学的意味と数学的表現との基本的な関係にかかわる特性である。本研究では、子どもたちの表現には、子どもたちによって構成された意味がシンボル化されていると捉え、それを図2のように表すこととした。そして、これを「意味と表現に関する基本ユニット」(以下、基本ユニット)とよぶこととした。図2において、MからRへの矢印は、意味の表現へのシンボル化を意味する。このように、基本ユニットは、シンボル化を基軸としながら、意味と表現が相互補完的かつ一体的に構成、変容することを示している。

特性2は、意味を反映した表現の発達・変容に関する基本的特性である。算数・数学学習が進展するときには、表現の対象化や表現の能記性・所記性の転換が生じる。このことをふまえ、社会的相互作用によって促進される表現の対象化や、表現の能記性と所記性の転換を「」によって表すとともに、「基本ユニット」間の変容を図3のように表すこととした。勿論、表現にはシンボル化された意味が反映されているため、表現の対象化、能記性・所記性の転換は、意味の対象化や振り返りも含意している。

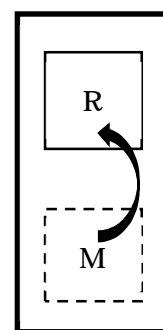


図2 シンボル化を基盤とした「意味と表現に関する基本ユニット」

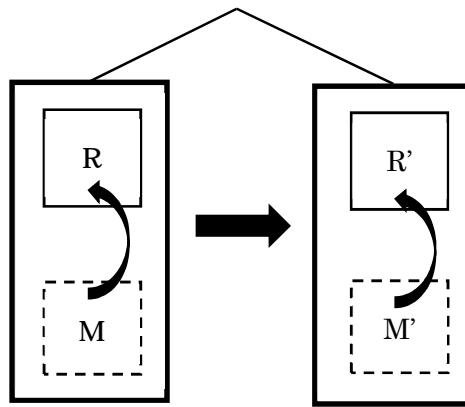


図3 「基本ユニット」の対象化と能記性・所記性の転換

特性3について、「基本ユニット」の連続的発達においては、「表現」の質的変容や、表現に反映された「意味」の質的変容が問題になる。本研究では、社会的相互作用の重要な役割として、「意味の協定」と「表現の協定」の2つに注目していることをふまえ、協定の程度に応じて、「意味の協定」と「表現の協定」を以下の3つの水準で捉えることとした。

- | |
|--|
| <p>〔R：表現 (representation)〕
 IR：インフォーマルな表現 (informal representation)
 L-NR：局所的に協定された表現 (locally negotiated representation)
 CR：慣例的表現 (conventional representation)</p> <p>〔M：意味 (meaning)〕
 SM：主観的意味 (subjective meaning)
 L-NM：局所的に協定された意味 (locally negotiated meaning)
 NM：協定された意味 (negotiated meaning)</p> |
|--|

特性4は、表現の受容と活用にかかわる特性である。このことについては、次の2点がポイントになる。第一は、インフォーマルな表現の専有や使用を積極的に授業に位置づけることである。第二は、慣例的表現の対象化や専有によって、質的に異なる新しい学習へ進展するというのである。つまり、慣例的表現の対象化や専有が、新しい学習への重要な契機になると考えている。

こうした特性を有する相互発達モデルの特徴を簡潔に述べるとすれば、次のようになる。つまり、「意味の協定」と「表現の協定」の2つの視座から、数学的意味と数学的表現の対を基本ユニットとしつつ、そこに「主観的意味 - 局所的に協定された意味 - 協定された意味」という「意味の距離」に関する軸と、「インフォーマルな表現 - 局所的に協定された表現 - 慣例的表現」という「表現の距離」の軸を組み込みながら、意味と表現の相互発達をモデル化した点に特徴がある。

(3)「数学的意味と数学的表現の相互発達」を視座とした「授業デザイン原理」

構成主義、社会文化主義、相互作用主義の3つの認識論の協応という認識論的立場や上述の相互発達モデルをふまえ、本研究では、「意味と表現の相互発達」を視座とした「授業デザイン原理」として、次の3つの原理を提案している。これら3つは、教師が、「意味と表現の相互発達」の視座から授業をデザインする際の基本的な指針とするものである。

- | |
|---|
| <p>〔原理1〕 数学的意味に関する子どもの素朴な認知モデルを検討する。その上で、社会的相互作用による「主観的意味」から「協定された意味」への数学的意味の発達過程を検討する。</p> <p>〔原理2 - 1〕 シンボル化された数学的表現の対象化、能記性・所記性の転換という視座から、社会的相互作用による「インフォーマルな表現」から「慣例的表現」への数学的表現の発達過程を検討する。</p> <p>〔原理2 - 2〕 インフォーマルな表現と慣例的表現との接続という視座から、慣例的表現の導入の適時性やその専有、道具化の過程について検討する。</p> |
|---|

これら3つの原理のうち、原理1は、主として、意味の発達過程に関する原理である。また、それは、構成主義、相互作用主義を認識論的背景とする原理である。一方、原理2-1と原理2-2は、主として、表現の発達過程に関する原理である。原理2-1は、相互作用主義、社会文化主義を認識論的背景とする原理であり、原理2-2は、社会文化主義を認識論的背景とするものである。実際には、こうした3つの原理を基本としつつ、個々の教材の特性をふまえながら、授業を具体化することとしている。

2. 研究の目的

本研究は、上述のような研究の背景やこれまでの研究の経緯をふまえつつ、「相互発達モデル」

や「社会的相互作用」、「慣例的表現」という3つのキーワードに注目しながら、相互発達モデルに基づく授業モデルの策定や授業改善の提言を目的とするものである。具体的な研究目的は、次の2つになる。第一は、相互発達モデルに基づいて、中学校における統計教材に関する授業モデルを策定し、その有効性を検証することである。第二は、相互発達モデルに基づいて、高等学校における三角比、三角関数の教材に関する授業モデルを策定し、その有効性を検証することである。

3. 研究の方法

相互発達モデルの理論的精緻化については、構成主義、社会文化主義、相互作用主義といった各種の認識論的研究及び記号論的研究の知見をもとに、主として、文献解釈の方法によって、研究を行った。また、統計教材や三角比、三角関数の授業に関する課題の明確化や授業改善案の策定にあたっては、主として、教科書分析を行うとともに、過去の実践事例を検討した。

なお、当初の計画では、教授実験を通じて、これらの教材に関する授業モデルの有効性、妥当性を実証的に検証する予定であったが、新型コロナウイルスの感染拡大の影響により、中学校や高等学校における教授実験の実施が困難となり、十分な検証を行うことができなかった。そのため、本研究において理論的に検討した授業モデルの有効性、妥当性の実証的検証については、今後の研究課題としたい。

4. 研究成果

(1) 相互発達モデルに基づく中学校第2学年「箱ひげ図」に関する授業モデルについて

本研究では、第一の研究目的にかかわって、相互発達モデルを理論的基盤としながら、中学校第2学年「箱ひげ図」に関する授業モデルの策定に取り組んだ。統計教材のうち、「箱ひげ図」の教材に注目した理由は、次の2つによる。第一の理由として、2017年告示の中学校数学科学習指導要領において、箱ひげ図が中学校第2学年の教材として新たに位置づけられ、その授業モデルの策定が求められているからである。第二の理由として、相互発達モデルに照らしたとき、「箱ひげ図」の授業については、「箱ひげ図」という慣例的な統計的表現と、箱ひげ図につながる生徒自身のインフォーマルな統計的表現との接続が授業づくりの要になると考えられるからである。

本研究では、Cobb (2002) などの先行研究をふまえながら、「箱ひげ図」に関する授業モデルを検討したが、そのポイントを簡潔に整理すると、次の2点になる。第一のポイントは、ヒストグラムやドットプロットといった既習の統計的表現を利用しながら、データの散らばり具合や最大値、最小値などといったデータの分布状況の特徴を生徒たちなりに十分に考察、表現させるとともに、既習の統計的表現ではデータの特徴を効率的かつ精緻に考察、表現することができないことを実感させた上で、新たな慣例的表現として「箱ひげ図」の導入を図ることである。第二のポイントは、「箱ひげ図」を導入した後の授業では、「箱ひげ図」が新たな思考の道具となるように、様々な事象に関する統計データを「箱ひげ図」を用いて考察させる活動を十分に設けることである。

(2) 相互発達モデルに基づく高等学校・数学Ⅰ「三角比」及び数学Ⅱ「三角関数」に関する授業モデルについて

本研究では、第二の研究目的にかかわって、相互発達モデルを理論的基盤としながら、高等学校・数学Ⅰ「三角比」及び数学Ⅱ「三角関数」に関する授業モデルの策定に取り組んだ。「三角比」や「三角関数」の教材に注目した理由は、次の2つによる。第一の理由として、従来より、三角比の理解の困難性が指摘されており、指導の改善が求められているからである(例えば、国立教育政策研究所教育課程研究センター、2007)。第二の理由として、相互発達モデルに照らしたとき、これらの教材では、 \sin (正弦)、 \cos (余弦)、 \tan (正接)という新たな記号の意味理解が重要になるとともに、表、グラフ、式といった関数に固有の慣例的表現との相互関連を図った理解も重要になるからである。

本研究では、Presmeg (2008) などの先行研究をふまえながら、「三角比」及び「三角関数」に関する授業モデルを検討したが、そのポイントを簡潔に整理すると、次の2点になる。第一のポイントは、三角比にかかわる授業では、中学校で学習した三角形の「相似」と関連づけながら、「相似な三角形の辺の比が一定になる」という視座から、正弦、余弦、正接のそれぞれの定義の意味理解を十分に図った上で、 \sin 、 \cos 、 \tan といった三角比に関する新たな数学的表記を導入することである。第二のポイントは、三角関数にかかわる授業では、三角関数の式表現や表、グラフ、単位円上での図表示が三角関数の定義やその意味の象徴(シンボル)となるように、それぞれの表現間の相互関連を十分に図ることである。

(3) 相互発達モデルに基づく授業づくり、授業研究における授業観、数学観の与える影響について

前述のように、相互発達モデルは、構成主義、社会文化主義、相互作用主義の3つの認識論の協応を認識論的基盤とするものである。これら3つの認識論は、数学的知識の客観性の捉え方などにおいて異なるものの、いずれも社会的相互作用や子どもたちの主体的活動を重視するものである。これらの点をふまえ、本研究では、具体的な授業例や教材例をまじえながら、教師の有

する数学観,授業観や社会的相互作用の捉え方が相互発達モデルに基づく授業づくり,授業研究にとっても重要な視座になることを指摘した。

<引用文献>

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2007).平成17年度教育課程実施状況調査(高等学校)結果概要・集計表 数学(数学I).

中原忠男(1999).数学教育における構成主義的授業論の研究() - 「数学学習の多世界パラダイム」の提唱 - .全国数学教育学会誌・数学教育学研究,第5巻,1-8.

山口武志(2012).数学教育における認識論と授業実践との架橋をめぐる課題 - 「数学的意味と表現の相互発達」を中心に - .日本数学教育学会・第45回数学教育論文発表会論文集(課題別分科会の部:数学教育学の成立と発展),第1巻,9-14.

山口武志(2016).算数・数学教育における社会的相互作用に関する認識論的・記号論的研究 - 「意味と表現の相互発達」の視座からの小学校第2学年「たし算」に関する授業改善 - .全国数学教育学会誌・数学教育学研究,第22巻・第1号,115-147.

Cobb,P.(2002).Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In Gravemeijer,K., Lehrer,R. van Oers,B. & Verschaffel,L. (eds.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp.171-195). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Presmeg,N.(2008). Trigonometric connections through a semiotic lens. In Radford,L., Schubring,G. & Seeger,F. (eds.), Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom and culture. (pp.103-119). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishes.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計2件

1. 著者名 山口武志	4. 発行年 2021年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 276
3. 書名 算数・数学 授業研究ハンドブック〔「第14章 数学観・数学教育観と授業研究の関わりについて」 (pp.174-183)〕	

1. 著者名 山口武志	4. 発行年 2019年
2. 出版社 日本教育研究センター	5. 総ページ数 160
3. 書名 新訂 算数科教育の研究と実践〔「第5章 数と計算」, 「§1 指導内容の概観」(pp.77-79)及び 「§2 整数とその計算」(pp.80-88)〕	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------