様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2024
課題番号：１９Ｋ０３３９３

研究課題名（和文）トーリック多様体とカスプ特異点の研究

研究課題名（英文）Research on toric varieties and cusp singularities

研究代表者
石田　正典（Ishida, Masanori）

東北大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：３０１２４５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではトーリック型カスプ特異点や一般のトーリック多様体について様々な研究を行ったが，特に 2018 年に土橋によって発見された 4 次元カスプ特異点の研究で大きな成果が得られた．この特異点はある無限コクセター群の指数 48 の部分群により構成されたが，その部分群は確定する形では書かれていなかった．本研究ではこれを確定させることにより，この特異点の非特異化の 4 つ例外因子がどのように正規交叉して 48 個の通常 4 重点を作っているかを解明した．さらにこの特異点のトッド種数とゼータ零値を求めた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
トーリック多様体の理論は代数幾何学の一部であるが凸多面体や多角凸錐で記述されるなど組み合わせ論的要素が大きい．そのため代数幾何学の中で計算機が最も有効に利用できる分野である．また非常に抽象的な議論の多い代数幾何学の中で，抽象論から具体的な計算可能な実例を引き出すことを可能にする理論である．この研究でも 4 次元カスプ特異点を一般の方にも見易い 3 次元の多面体として視覚的に表現するなど計算機を活用した．

研究成果の概要（英文）：In this project, we studied various problems on toric type cusp singularities and toric varieties. In particular, we got a good progress on the four-dimensional cusp singularity found by Tsuchihashi in 2018. This singularity is constructed by a subgroup of index 48 of an infinite Coxeter group. By fixing this subgroup explicitly, we describe how the four prime divisors intersect in the total exceptional divisor of the resolution which is simple normal crossings with 48 ordinary four fold singularities. Furthermore, we calculated the Todd genus and the value at zero of the zeta function of the singularity.

研究分野：代数幾何学

キーワード：トーリック多様体　代数幾何学　カスプ特異点　コクセター群

1　研究開始当初の背景

トーリック多様体は例としてまず射影空間やその直積が最初に挙げられる有理代数多様体で，実空間に置かれた有理凸多角錐やその集まりである扇で記述されるという特徴を持つ．ヒルツェブルフ曲面や重み付き射影空間もその例である．もちろん射影空間は古くから考えられているが，代数多様体のクラスとしてのトーリック多様体がはっきり認識されたのは 1970 年のドマズールの論文からで，その後，小田・三宅，佐武，マンフォードなどにより理論が確立された．初期に最も注目されたのは，この理論を応用してジーゲル空間の離散群による商空間の佐武コンパクトなどの局所対称空間の非特異化，すなわちトロイダルコンパクト化に成功したことである．

2 次元のカスプ特異点はヒルツェブルフなどにより研究されたヒルベルトモジュラー曲面に現れる特異点で，非特異化の例外因子は非特異有理曲線の輪となる．この非特異化の過程は 2 次元扇への無限巡回群による作用と，これに対応するトーリック曲面の商空間という形でトーリック幾何により見事に記述される．一般には局所対称空間のコンパクト化に現れる特異点，すなわち一般次元のカスプ特異点は孤立特異点とは限らず，トロイダルコンパクト化に現れる例外因子の既約成分はアーベル多様体とトーリック多様体を合成したようなものなど複雑になる．佐武は数論的離散群の作用により生ずるカスプ特異点の中で，Q 階数 1 でトーリック多様体だけが例外因子として現れる孤立特異点の不変量などを研究した．一方，土橋は 1983 年の論文 [T1] で 2 次元カスプ特異点の非特異化の過程の逆を高次元に一般化することにより，離散群が作用する無限扇から得られた，代数的トーラスの外に無限個の既約因子を持つ，トーリック多様体のある開集合の商空間を考え，商空間で有限個となった既約因子をすべて収縮させることにより孤立特異点を構成した．これは一般には土橋カスプ特異点と呼ばれことが多いが，ここではトーリック型カスプ特異点とする．特に土橋により 2018 年の論文 [T2] で構成された 4 次元カスプ特異点は非常に興味ある対象であった．

2　研究の目的

トーリック型カスプ特異点としては 2 次元以上すべての次元に，総実代数体から定義されるヒルベルトモジュラーカスプ特異点が多く存在する．また，総実代数体上の四元数体から得られるものなどの Q 階数 1 の数論的離散群から得られる特異点の佐武による分類もある．ただし，特異点の非特異化には開凸錐の非特異扇への細分が必要であるが，3 次元以上の場合はほとんどの場合非常に複雑になり，実際の作業は実行不能と思われる．この研究では数論的群によって得られるカスプ特異点を排除はしないが，それにこだわらずに広い範囲で研究することを目的とした．またカスプ特異点は双対開凸錐と転置作用を考えることにより双対カスプ特異点が得られることも著しい特長であるので，その関係を調べるのも目的の一つであった．

カスプ特異点を与える非特異扇から計算される不変量について調べることも目的であった．このうちトッド種数とゼータ零値は群作用だけに依存する「双有理不変量」であるが，このようなものが他にあるか．カスプ特異点のトッド種数とゼータ零値は奇数次元の場合は記述が簡単で微妙さが少ない．このため，特に奇数次元で新しい不変量が存在するかも重要な問題である．

3　研究の方法

初年度は研究代表者の石田と分担者の土橋は東北大学数学教室において，ほとんど毎週セミナーを行い，互いの得られた結果について説明し意見を交換した．また関係する分野の最新の結果を知るため日

本数学会秋季総合分科会などに出張して研究を進めた．ただし 2020 年 4 月からはウイルス感染症の流行のためセミナーは中止となり出張も行えなくなった．さらに分担者の土橋は 2020 年度で勤務先の宮城教育大学を退職したため，やむを得ずこの年度で分担者を終了することになり，2021 年度からは分担者なしで研究を行った．2023 年 3 月には久しぶりに数学会年会に出席して代数学における最新の結果を直接聞くことが出来た．6 月には中央大学理工学部での第 76 回 ENCOUNTER with MATHEMATICS「K3 曲面 -未だ尽きせぬその魅力-」に出席し，2023 年 9 月の東北大学での日本数学会秋季総合分科会と 2024 年 3 月の大阪公立大学での日本数学会年会に出席した．2024 度は 2024 年 8 月に筑波大学での代数学シンポジウム，9 月に大阪大学での日本数学会秋季総合分科会，10 月に京都大学での代数幾何学シンポジウム，さらに 12 月には熊本大学での研究集会「可換環論と射影代数幾何学」に出席して研究を進めた．研究期間中にノートパソコンやデスクトップパソコンとモニターを購入して種々の計算を行った．

4 研究成果

$r \geq 2$, $N \simeq \mathbf{Z}^r$, $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^r$ とする．トーリック型カスプ特異点は下記の条件を満たす開凸錐 $C \subset N_{\mathbf{R}}$ と $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}(r, \mathbf{Z})$ の部分群 Γ によって定義される．
(1) C は閉包 $\overline{C}$ が強凸，すなわち $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$ となっている．
(2) Γ の各元は C を不変にしていて，さらに $(C/\mathbf{R}_+)$ に自由に作用していて商空間 $(C/\mathbf{R}_+)/\Gamma$ がコンパクトである．

このとき $N_{\mathbf{R}}$ の $C \cup \{0\}$ を台とする Γ 不変な非特異扇 Σ が存在する．Σ に対応する非特異トーリック多様体を $Z(\Sigma)$ とすると，$Z(\Sigma)$ は代数的トーラス T_N を開部分多様体して含み，$D(\Sigma) = Z(\Sigma) \setminus T_N$ は無限個の既約成分を持つ余次元 1 の部分多様体である．基礎体を複素数体として複素解析的に考え，$D(\Sigma)$ の適当な開近傍 U をとると Γ が U に自由に作用して，商複素多様体 $\overline{U} = U/\Gamma$ が有限個の既約成分からなる因子 $\overline{D} = D(\Sigma)/\Gamma$ を含む．この因子 $\overline{D}$ が複素解析的に 1 点 p に縮小し得られる孤立特異点 (V, p) がトーリック型カスプ特異点である（[T1] 参照）．作り方から $\overline{U}$ がこの孤立特異点の非特異化であり $\overline{D}$ がその例外因子となる．

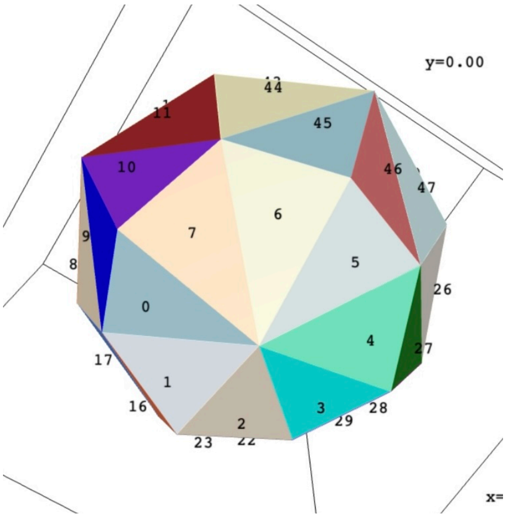
2018 年の土橋カスプ特異点はある無限コクセター群 W を用いて次のように構成される．$N = \mathbf{Z}^4$ とし π を $\mathbf{R}^4$ の標準基底で生成される 4 次元非特異錐とする．ある無限コクセター群 W の線形表現による線形作用により

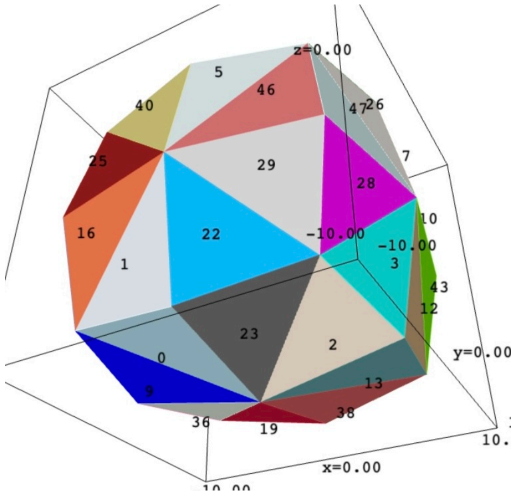
$$C_0 = \bigcup_{\gamma \in W} \gamma(\pi)$$

と置けば，$C = C_0 \setminus \{0\}$ は開凸錐となり W が作用する．土橋は C に自由に作用する W の指数 48 の部分群 T_{48} を発見した．これから得られるのが土橋カスプ特異点 2018 である．ただし土橋の論文では T_{48} は確定する形では書かれていなかったので，本研究ではこれを確定させる必要があった．

この特異点の非特異化の例外因子は 4 つの既約因子 D_0, D_1, D_2, D_3 を持ち，これらは 3 次元の非特異トーリック多様体である．例外因子はこれらの既約因子の単純正規交叉で 48 個の通常 4 重点を持つという想像しにくい構造をしている．これらの既約因子それぞれに対応する 3 次元凸多面体が考えられ

る．下図は D_0 と D_1 のものを 2 次元に射影した図である．





2 つは 4 角形を面とする微妙に違う 24 面体で，0 から 47 の番号の付けられた 48 個の三角形に分割されている．各三角形はそれぞれ D_0, D_1 の特定の点に対応する．他の 2 つも同様で同じ番号の付けられた既約因子の 4 点が集まって例外因子の 4 重点を作っている．

Todd 種数は大域的な多様体についてはヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理の定理により構造層のオイラー数と等しくなる不変量であるが，土橋カスプ特異点の場合は局所的に計算出来て値は一般に分数となる．例えば 2 次元の（ヒルベルトモジュラー）カスプ特異点では例外因子は有理曲線のサイクルとなるが，自己交点数が $a_1, \ldots, a_s$ $(s \geq 2)$ の場合，Todd 種数 χ_∞ は

$$\chi_\infty = \frac{a_1 + \cdots + a_s}{12}$$

である．

T_{48} で定義されるカスプ特異点の場合は例外因子は 4 つの既約因子 D_0, D_1, D_2, D_3 で構成されていて，Todd 種数は交点数として

$$\begin{aligned}\kappa_4\left[\prod_{i=0}^{3}\frac{D_i}{1-\exp(-D_i)}\right] \quad &= \quad \frac{D_0D_1D_2D_3}{16} + \frac{D_0^2D_1D_2 + \cdots + D_1D_2D_3^2}{48} \\ &\quad + \frac{D_0^2D_1^2 + \cdots + D_2^2D_3^2}{144} - \frac{D_0^4 + D_1^4 + D_2^4 + D_3^4}{720}\end{aligned}$$

で計算される．最初の $\kappa_d[f]$ は D_0, D_1, D_2, D_3 を変数とする形式的冪級数の斉次 d 次の成分を表す．右辺には D_0, D_1, D_2, D_3 の単項式が $1 + 12 + 12 + 4 = 29$ 個あるが，交わりが多くの連結成分に分かれるので，連結成分ごとに考えると $48 + 96 \times 3 + 52 \times 2 + 52 + 4 = 496$ 個の交点数を求める必要がある．コクセター群の線形表現の取り方には A 型と B 型の二通りがあり，それぞれ別の特異点を与える．

A 型の場合 は ${D_0}^4, {D_1}^4, {D_2}^4, {D_3}^4$ の計算が最も複雑であるが計算ソフトの SageMath を用いた計算を行った結果，${D_0}^4 = -136$， ${D_1}^4 = -204$， ${D_2}^4 = -184$， ${D_3}^4 = -160$， $\chi_\infty = \dfrac{19}{20}$ となり

B 型の場合は ${D_0}^4 = -86$， ${D_1}^4 = -84$， ${D_2}^4 = -176$， ${D_3}^4 = -304$， $\chi_\infty = \dfrac{11}{12}$ となることがわかった．

尾形のゼータ関数 $Z(C,\Gamma;s)$ が，開凸錐 C の特性関数 $\phi_C(x)$ を用いて，$\mathrm{Re}\, s>1$ の場合に

$$Z(C,\Gamma;s)=\sum_{x\in(N\cap C)/\Gamma}\phi_C(x)^s$$

で定義され，さらに全複素平面に有理型関数として解析接続される（[O] 参照）．また $s=0$ では正則である．ゼータ零値 $Z(C,\Gamma;0)$ が有理数であることはわかっている．ゼータ零値の積分表示は尾形の論文にあるが，それを発展させて扇の群による商をシステム化した T 複体を使って計算する方法がある．その方法では d 次元非特異錐の原始的な生成元を $x_0,\dots,x_{d-1}$ として，d 次斉次多項式を，$d=1, d=2, d=3$ なら

$$-\frac{x_0}{2}\,,\quad \frac{x_0^2+x_1^2}{12}+\frac{x_0x_1}{4}\,,\quad -\frac{x_0^2x_1+\cdots+x_1x_2^2}{24}-\frac{x_0x_1x_2}{8}\,,$$

$d=4$ なら

$$-\frac{x_0^4+\cdots+x_3^4}{720}+\frac{x_0^2x_1^2+\cdots+x_2^2x_3^2}{144}+\frac{x_0^2x_1x_2+\cdots+x_1x_2x_3^2}{48}+\frac{x_0x_1x_2x_3}{16}$$

のように定義して $(\Delta\setminus\{\mathbf{0}\})/T_{48}$ のすべての非特異錐に与える．そして，それらの多項式を面となる低い次元の錐に順次移して 1 次元錐以外は 0 で 1 次元錐では原始生成元を x とすれば x の定数倍に出来る．このとき，ゼータ零値はすべての 1 次元錐での係数の和となる．

この計算を 2018 年の A 型と B 型両方の特異点について SageMath でプログラム化を行ってゼータ零値を求めることが出来た．

A 型の場合，ゼータ零値は $\dfrac{1}{60}$ となり，B 型の場合，ゼータ零値は $\dfrac{1}{12}$ であった．

これらの計算に用いた実行可能な SageMath プログラムは東北大学数学教室内の石田のページ

`http://www.math.tohoku.ac.jp/~ishida.masanori`

で公開する予定である．

トーリック多様体の研究は世界的にも盛んであるが，トーリック型カスプ特異点の研究はまだ少ない．不変量についても 2 次元では Todd 種数とゼータ零値の和は 0 となるが，4 次元ではまだ計算できる例は少なく，双対カスプ特異点まで考えない場合は，予想できる相互関係は無い．当研究期間は終わるが，これからも研究を続けたい．

引用文献

[O] S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37**, (1985), 367-384.

[T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, (1983), 607-639.

[T2] H. Tsuchihashi, Examples of four dimensional cusp singularities, J. Math. Soc. Japan **70–3**, (2018), 1047–1062.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

東北大学大学院理学研究科数学専攻石田正典ホームページ http://www.math.tohoku.ac.jp/~ishida.masanori

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	土橋　宏康 (Tsuchihashi Hiroyasu) (00146119)	宮城教育大学・教育学部・特任教授 (11302)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関