

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03396

研究課題名（和文）K3 保型関数と付随する周期超幾何微分方程式

研究課題名（英文）K3 modular functions and hypergeometric period differential equations

研究代表者

志賀 弘典（Shiga, Hironori）

千葉大学・大学院理学研究院・名誉教授

研究者番号：90009605

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000 円

研究成果の概要（和文）：当初提出の、研究計画調書 様式 S-14 に従って、研究プロジェクトを遂行した。特に、調書 3.1 節に挙げた、本プロジェクト開始時点での成果としての、学术论文、学会シンポジウム講演、集中講義に加えて、researchmap に掲げる新作論文 5 編、学会シンポジウム講演 7 回、啓蒙記事 3 編を当プロジェクトの一環として発表した。その詳細な内容は発表予定の、数学会機関誌「数学」の論説として展開されている。また、この内容をサポートする私的講演ノートが researchmap に公開されているが、すでに download access は 500 を超えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本プロジェクトにとどまらず、研究代表者の研究は、一貫して K3 保型関数の明示的構成によって、19 世紀数学の華であった保型形式的数論の拡張を目指し、同時に、数理物理学の基本問題であるミラー対称性の研究にも一定の貢献を果たすことを視野に置いた。

その社会的意義：数学は、西欧古代における発生時点から、森羅万象の根本原理に迫ることを目標としていた。この事実は現代でも変わらない。今日人工知能の価値が喧伝されているが、それは、巨大な有限データを高速処理する技術であり、無限要素を思惟して世界の究極を追求する純粋数学とは別種のものである。本プロジェクトもこの根本姿勢に依拠して、社会的意義を考慮して遂行した。

研究成果の概要（英文）：I made my study progression according to the research plan presented as S-14 in the application paper to JSPS. In section 3.1 I listed up the academic papers, oral talks at the academic meeting and concentrated academic lectures that I obtained at the beginning of this project. After that I published 5 academic papers, 7 oral academic talks and 3 concentrated lectures cited on Researchmap. The detail of the result is explained in the forthcoming my research argument paper on “Sugaku” (2024). The supporting argument for it is already open on my Researchmap private seminar note, with already over 500 download accesses.

研究分野：代数学特に保型形式論

キーワード：K3 曲面 保型形式 超幾何微分方程式 テータ函数 虚数乗法論

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

以下申請時の計画を再掲する。

### 1. 研究開始当初の背景

- (i) 周辺の研究状況の鳥瞰. **K3** 保型関数周辺の国内外の研究は、過去から現在まで多様であるが、簡単に眺めてみよう。もともと、この研究は 1977 年に研究代表者がコルトーナ(伊)の国際会議で提唱した(論文は [1][2] がその続編) のが世界で最初である。
- (ii) その後、数理物理学の「ミラー対称性」における“ミラー写像”の数学的記述が、**K3** 曲面の 3 次元版である“カラビ・ヤウ多様体族の ” 保型関数になっていることが明らかになり、関心が高まった。
- (iii) P. Candelas らの **Dwork pencil**  
 $x^5+y^5+z^5+w^5+1-5\psi xyzw=0$  ( $\psi$  が変形のパラメーター) の周期に関する仕事([4])がその嚆矢である。以後、ミラー対称性の数学は巨大となり、その中で **K3** 曲面の各種の「ミラー対称性予想」が提起されたが、完全解決には至らず、現在でも多くの関連論文が発表されている。
- (iv) 一方、14 種の 2 次元例外型正規孤立特異点( $z^2+y^3+x^7=0$  がその典型)の“ヴァーサル変形”によって **K3** 曲面族を生じるが、E. Brieskorn ([5])は、この曲面族の周期写像の研究を提唱した。斉藤恭司は、この考えを進めて、壮大な原始形式の周期の研究を展開した。斉藤の仕事を発展的に継承するのが植田一石らで、最近 [3](橋本健治と共著)を発表して、内外の注目を集めている。ここでは、申請者の論文 [2] が研究の起点になっている。
- (v) さらに、複素射影空間内に、点、直線等を配置して、それらを分岐点とする被覆空間即ち orbifold、の変形族を作り周期を考えると、(多変数)超幾何型微分方程式の解が現れる。特別な場合には、これは **K3** 曲面族の周期微分方程式となり、吉田正章、佐々木武、松本圭司による研究 (1992) は、この配置空間の幾何学を起点とした **K3** 保型関数の著しい成功例である。
- (vi) (4) 申請者も、次項に述べる視点から研究を展開し、数論的な貢献を含む成果を挙げている [7],[8].

### 2. 研究の目的

- (1) Hilbert 第 12 問題の要請に貢献できるほど精緻な多変数保型関数を、**K3** 曲面ないし超幾何微分方程式を介して構成することが目標である。
- (2) 上記の目標に対して、申請者(と共著者)以外これまで具体的な成果は得られていない。したがって、この目標自体が高度の独自性を持つ。
- (3) 1 変数関数に対して、多変数関数では、大きな意義をもつ特殊関数は稀にしか構成されてこなかった。広範な研究領域に影響を与える関数の構築を目指すことにおいて、本研究は創造的である。

### 3. 研究の方法

(a) 単純 K3 特異点と呼ばれる 3 次元正規孤立特異点が 95 種存在し(米村崇による (1990))、この特異点自身が複素構造の変形を持ち、S. M. Belcastro によってそのピカール格子が研究された (1997)。その格子構造中に有望なものを申請者はすでに発見しており(リスト中の no. 88)、このような族から K3 保型函数を構成できる。これを H31 年度に実行する。

(b) Appell 型の超幾何微分方程式のシュワルツ写像(=周期写像)から 27 個の 2 変数保型函数が取り出せる(寺田 (1985) および Deligne-Mostow (1986) による)、その幾つかに対しては保型函数のテータ函数による表示が得られている([7] 等)。この方法を継続して新たな保型函数を得ることができる。すでに、この保型函数を用いて、数論的三角群(竹内喜佐雄が 1977 に列挙)中の  $\Delta(3, 3, 5)$  に対して志村の意味の正準保型函数を構成したが、この手法を他の数論的三角群に適用できる。

類似の正準保型函数が新たに得られれば、未だ申請者の研究([8])以外に具体例のない“志村虚数乗法論による(虚数乗法体の)絶対類体の構成”、が系列的に可能である。

(c) Dwork pencil に対するモジュラー函数(文献 [4])は、依然として明示的な表示が得られていない。その困難さは、関連して現れる三角群  $\Delta(2, 10, \infty)$  が非数論的だからだと思われる。この非数論的三角群は上半平面の直積  $H^2$  にモジュラー的に埋蔵できるので、 $H^2$  上の K3 保型函数(すでに申請者が考察している)を通じて解明できる。全期間考察する。

上記 1,2,3 に照らして、本プロジェクトの結果を総括してみる。

#### 4. 研究成果

i) 概要。(a) に関しては、予期以上の結果が得られた。すなわち、Belcastro 1997 年の結果は誤りを含んでおり、我々の対象とした Yonemura no.88 に於いては、K3 曲面の興味深い二重被覆分だけ格子構造がずれてくる。ここから、新しい研究の端緒が現れている。Nachrichten 論文で詳細を述べた。(b) に関しては J. Number Theory に新しい結果を明らかにした。(c) は以前として今後の課題である。

#### ii) 論文

- Atsuhira Nagano and Hironori Shiga, [Geometric Interpretation of Hermitian Modular Forms via Burkhardt Invariants](#), Transformation Groups (29) 253-275, 2024 年
- 志賀弘典, [K3 的超幾何保型形式](#)、「数学」(掲載決定)、1-30, 2024 年
- Atsuhira Nagano and Hironori Shiga, [On Kummer-like surfaces attached to singularity and modular forms](#), Mathematische Nachrichten (296), 2513-2534, 2023 年
- Hironori Shiga, [An explicit Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6](#), RIMS Kokyuroku Bessatsu B77, 127-140, 2020 年
- Hironori Shiga, [The Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6 on the Ihara-Kurihara conic](#), J. Number Theory (201), 257-279, 2019 年

#### iii) 寄稿

- 志賀弘典, [楕円積分と楕円函数](#)、数学セミナー 60(10) 8-14 2021 年
- 志賀弘典, [途上国での数学講義/パキスタンとルワンダでの滞在を回顧しつつ](#)、数学セミナー 60(4) 50-54 2021 年

- 志賀弘典、[管見的 -- 保型形式入門](#)、数理科学 59(2) 15-23 2021 年 2 月

iv) 講演

- 志賀弘典、[K3-超幾何的 算術幾何平均の舞台裏](#)、第 19 回 北陸数論研究集会「超幾何関数の数論とその周辺」2023 年 11 月
- Hironori Shiga, A story of K3 hypergeometric modular forms, Seminario di Algebra e Geometria, Dipartimento di Matematica Universit'a di Roma (La Sapienza), 2022 年 10 月
- Hironori Shiga, [K3 hypergeometric modular forms](#), Seminario su geometria algebrica e teoria dei numeri, dep. math., Padova University 2022 年 10 月

\*参考文献

- [1] H. Shiga, One Attempt to the K3 modular function I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser IV vol. VI(1979), 609 - 635.
- [2] H. Shiga, One Attempt to the K3 modular function III, preprint (1982).
- [3] K. Hashimoto and K. Ueda, The ring of modular forms for even unimodular lattice of signature (2,10), arXiv:1406.0332 [math.AG].
- [4] P. Candelas, X. C. Dela Ossa, P. Green and L. Parkes, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Nuclear Physics B359 (1991), 21 - 74.
- [5] E. Brieskorn, The Unfolding of Exceptional Singularities, Nova Acta Leopoldina, NF 52 Nr. 240(1981), 65-93.
- [6] G. Shimura, Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. Math. 85 (1967), 58 - 159.
- [7] H. Shiga, On the representation of the Picard modular function by theta constants I-II, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ., vol. 24(1988), 311 - 360.
- [8] A. Nagano and H. Shiga, To the Hilbert class field from the hypergeometric modular function, J. Number Theory, 165 (2016), 408 - 430.

---

以下は、researchmap によるデータである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 1
2. 論文標題 K3 的超幾何保型形式	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数学（掲載決定）	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nagano and H. Shiga	4. 巻 1
2. 論文標題 Geometric Interpretation of Hermitian Modular Forms via Burkhardt Invariants	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups (Published on-line)	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nagano and H. Shiga	4. 巻 1
2. 論文標題 On Kummer-like surfaces attached to singularity and modular forms	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten (掲載決定 to appear in 2023)	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nagano and H. Shiga	4. 巻 Published on line
2. 論文標題 Geometric Interpretation of Hermitian Modular Forms via Burkhardt Invariants	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nagano and H. Shiga	4. 巻 to appear
2. 論文標題 On Kummer-like surfaces attached to singularity and modular forms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 692
2. 論文標題 管見的 -- 保型形式入門	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 15 -- 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 60 -4
2. 論文標題 楕円積分と楕円函数	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 8 -- 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 60-10
2. 論文標題 途上国での数学講義/パキスタンとルワンダでの講義を回顧しつつ	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 50 -- 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hironori Shiga	4. 巻 77
2. 論文標題 An explicit Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu B77 127 - 140, 2020年	6. 最初と最後の頁 127 - 140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 59
2. 論文標題 管見的 -- 保型形式入門	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理科学 59(2) 15 - 23, 2021年2月	6. 最初と最後の頁 15 - 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 志賀弘典	4. 巻 60
2. 論文標題 途上国での数学講義 / パキスタンとルワンダでの滞在を回顧しつつ	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー 60(4) 50 - 54, 2021年4月	6. 最初と最後の頁 50 - 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hironori Shiga	4. 巻 B77
2. 論文標題 An explicit Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 127 -- 140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hironori Shiga	4. 巻 201
2. 論文標題 The Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6 on the Ihara-Kurihara conic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Number Theory	6. 最初と最後の頁 257--279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 A story of K3 hypergeometric modular forms
3. 学会等名 , Roma Univ. La Sapienza (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 K3 hypergeometric modular forms
3. 学会等名 Seminario su Geometria algebrica e teoria dei numeri, dep. math. Padova Univ. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 志賀弘典
2. 発表標題 Mark 付き K3 曲面族の GKZ 秋季微分方程式的接近
3. 学会等名 アクセサリー・パラメータ研究集会、於熊本大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 志賀弘典
2. 発表標題 Mark 付き K3 曲面族の GKZ 周期微分方程式的接近
3. 学会等名 アクセサリー・パラメータ研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 単純 K3 特異点から導かれる保型形式環の明示
3. 学会等名 特異点セミナー 2020年11月2日 (リモート研究集会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 Hypergeometric Modular functions and the Shimura canonical model with applications
3. 学会等名 Hypergeometric Measures and Multiple Zeta Values (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 報告: AIMS (African Institute for Mathematical Sciences) における、汎アフリカ先端数理教育
3. 学会等名 RIKEN iThems のアウトリーチについての研究会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hironori Shiga
2. 発表標題 K3 modular functions and GKZ equations, alla Mandala
3. 学会等名 Mini-Conference on special functions, algebra and geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 志賀弘典 (分担執筆)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 7
3. 書名 数学好きの人のためのブックガイド	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------