様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １８ 日現在

機関番号：１３５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３３９８

研究課題名（和文）有限群のテンソル積表現中心化環とDiagram代数

研究課題名（英文）Centralizer for the tensor representations of finite groups and diagram algebras

研究代表者
小須田　雅（Kosuda, Masashi）

山梨大学・大学院総合研究部・教授

研究者番号：４０２９１５５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、有限群のテンソル積表現中心化環とDiagram代数、中でも複素鏡映群に関連するテンソル積表現の中心化環の構造の解明と中心化環を Diagram 代数として表示することを目指した。中心化環の構造（Multi-Matrix algebra　としての構造）は比較的容易に求めることはできたが、Diagram 代数として表示するという目標は達成できなかった。しかしながら、中心化環の構造を求めることで、不変式や符号理論との関連については、いくつかの新しい知見が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
テンソル積表現の中心化環の構造についての研究は1901年から行われている古い研究であり、昨今では Diagram 代数として捉える見方が出てきている。本研究で得られた中心可換はまだ Diagram 代数として捉える方法は見つかっていないが、不変式論や符号理論との関連が明らかになっており、古典的な研究と現代の研究の橋渡しとなる可能性がある。また本研究で得られた中心化環に関連する代数の次元の増大列はOEIS（オンライン数列大辞典）に掲載されており、数学の他の分野で現れる数列と一致していることが判明していることから、他分野との関わりも示唆されており、学術的に興味深い結果となっている。

研究成果の概要（英文）：In this study, we aimed to clalify the structure of the centralizer algebras of the tensor product representation of finite groups, especially finite unitary reflection groups, and to obtain the diagramatic presentation of the centralizer algebras. Although it was relatively easy to obtain the structure of the centralizer ring (as a Multi-Matrix algebra), we could not achieve the goal of displaying it as a Diagram algebra. However, by obtaining the structure of the centralized algebras, we were able to gain some new insights into the connection with invariant theory and code theory.

研究分野：表現論

キーワード：Diagram代数　中心化環　テンソル積表現

１．研究開始当初の背景

群のテンソル積表現の中心化環の研究の歴史は古く 1901 年の I. Schur の論文にまで遡る。この論文において Schur は、一般線形群 $GL_n(R)$ を n 次ベクトル空間のテンソル積空間に対角的に作用させた際の中心化環が対称群の群環と同型になること、テンソル積空間内での $GL_n(R)$ の既約表現の重複度が対称群の群環の既約表現の次数に等しいことなどを示した。この結果はその後，一般の群や結合代数のテンソル積表現と中心化環との間の対応の理論に一般化され Schur-Weyl の相互律と呼ばれるようになった。その後、類似の研究として 1937 年 R. Brauer は直交群 $O_d(R)$のテンソル積表現から Brauer 代数と呼ばれるものを構成した.

一方 1965 年、岩堀長慶は p 進体上の Chevalley 群の表現を通じて現在では岩堀 Hecke 代数と呼ばれる対称群の q 類似物を構成した。1980 年代半ばに V. Drinfeld , 神保道夫により量子群の研究が始められたが、その過程で量子群を Lie 群の q 類似物とみなすと A 型量子群と A 型岩堀 Hecke 代数の間に Schur-Weyl の相互律が成り立つことが示された。この結果は V. F. R Jones による結び目の新しい不変量の発見につながった。 Jones の論文を契機に BCD 型量子群に Schur-Weyl 相互律を適用して Brauer 代数の q 類似物である Birman-Murakami-Wenzl 代数が作られ、その表現から Kauffman 不変量が構成されるなど、結び目や絡み目の様々な不変量が構成されるようになった。これらは現在では量子不変量と呼ばれ、結び目･絡み目だけでなく、３次元多様体の不変量も同様に構成できることが知られるようになった。

1990 年代半ばに Schur-Weyl 相互律においてテンソル積に作用させる群をそれまでの連続群から有限群である置換行列のなす群（対称群）としたものが、V. F. R. Jones と P. P. Martin により独立に研究された。これにより得られる中心化環は現在では、Partition 代数と呼ばれている。1997 年に田邊顕一朗は V. F. R. Jones 達の研究をヒントに置換行列の成分を 1 のべき根に替えた複素鏡映群（これは Shephard-Todd の No. 2 に対応する群）のテンソル積表現の中心化環を考え、その生成元と幾つかの関係式を解明した。本研究の代表者である小須田は田邊の研究した中心化環から１つの生成元を取り除いてできる部分代数を考え Party 代数と名付け、その定義関係式と既約表現の完全代表系を求めた。Party 代数の名前の由来は、この代数の基底が、男子 n 人、女子 n 人の２つグループが男女同数となるように幾つかのテーブルに分かれて着席する（例えていうならば）合コンの組の分け方と対応が付くことによるものである。Partition 代数も Party 代数も生成元や基底を図に表すことができ、図の結合により積が記述できる点が組紐群と似ていることから、逆に基底を図式で表し、その結合で積が定義できるような代数が考えられるようになった。そのような代数は Diagram 代数と呼ばれ、C. Stroppel 達により現在でも精力的に研究されている。

2014 年になり、小須田は本研究の分担者である大浦学に誘われて、Shephard-Todd の No. 8, No.9 の複素鏡映群およびその部分群のテンソル積表現の中心化環の研究に従事した。これらの群は符号理論や不変式論に関係するものである。この研究については、中心化環の生成元と定義関係式、半単純環としての構造までは明らかになっているが、具体的な既約表現の構成や、基底を図式として表す方法（Diagram 代数として記述する方法）などについては未だ未解明である。

２．研究の目的

上述のことから本研究の当初の目的は、Shephard-Todd の No. 8, No.9 の複素鏡映群のテンソル積表現の中心化環の具体的な既約表現の構成と中心化環の基底を図式として表す方法を解明することにあったが、対象を絞り過ぎると一般的に成り立つ現象を見過ごす可能性があることとから、 これらの群とは別に幾つかの群を研究対象として加えることとした。

研究対象として加える群の選定については、分担者である大浦学の研究分野である符号理論や不変式論に関連したもの選び、表現についても自然表現だけでなく、正則表現や対象である群自身をその部分群で除した剰余類の空間を考え、そのテンソル積表現の分解や中心可換を考えることにした。具体的には次の３つ群と表現空間 V の組を研究対象とした。これらの群を V のテンソル積空間に作用させ、その中心可換の構造および Diagram 代数との関係の解明することが研究の目的となった。

(1) 作用させる群 H =２ｎ次の対称群 S_{2n}, 部分群 K= (Z/2Z)と n 次対称群の環積,　V=H/K
(2) 作用させる群 H = Sp(2g,Z)の準同型像 H_g, K は H の適当な部分群, V=H/K
(3) 作用させる群 H = Type II Z_4 符号に関連する位数 384, K は H の適当な部分群, V=H/K

(1)は Gelphand Pair として知られる有名な群の組であり、（テンソル積表現を取る前の）中心化環の構造についても良く知られているが、本研究は、さらにテンソル積表現を考え、その中心化環の構造を求め、基底、生成元、関係式の決定まで行いたいと考えた。(2)は g=1 の場合が Shephard-Todd の No. 8 の群に相当するものである。本研究では g が 1 よりも大きいものも含めて研究対象としていた。(3)も本研究の代表者がここ数年研究を続けているものであり、既に中心化環の構造については解明し、研究結果について発表していたが、基底、生成元、関係式の Diagram による解釈までには至っていないため、その解明を目的としていた。

３．研究の方法

基底の決定

まずは各ケースに対して基底の決定を行うことを試みるという手法を取った。
前述のとおり、(1)は Gelphand pair として有名な例である。既約分解は n 次の対称群 S_n の既約表現すべてが丁度 1 回ずつ現れることが知られている。一方、そのテンソル積表現の中心化環の構造を求めるには、テンソル積表現を既約表現に分解することが必要であるが、一般の n の場合にこれを求めることは「対称群の Kronecker 係数の決定問題」として有名な未解決問題である。しかしながら、n が小さい場合には、指標表を用いて分解を求めることが出来る。本研究の代表者は、小さい n についてテンソルの回数が増えるとともに、中心化環がどのように拡大していくか、Bratteli 図形を描いて考えることを試みた。これにより中心化環の行列環の直和としての構造を知り、基底、生成元、関係式、既約表現を求め、さらには n が一般の場合のテンソル積分解、すなわち Kronecker 係数の決定問題に対する新たなアプローチが導かれることを期待したが、たとえ n が小さくても、基底を図として表すことは困難であることが判明し、かなり早い段階でこの研究は断念することにした。

(2)については前述のように g が 1 の場合、H_g は Shephard Todd の No.8 の群であり、この場合のテンソル積表現の中心化環の構造については、2016 年に大浦学氏との共同研究によって求めることが出来ていた。その中でテンソルの増加に伴う中心化環の次元の増え方が、n 元集合を高々サイズ 4 の集合分割の方法の数と一致していることが判明していたので、中心化環の基底をこの集合分割に対応させるという問題が第一に考えるべきことであった。さらには、集合分割を図に表し、図の結合が中心化環の積を表すような対応関係式をうまく表現できるような対応を求めることに専念した。さらに g を大きくした場合にテンソル積表現の中心化環の構造を求め、それらについても、標準的な基底を決定し、Diagram 代数として表すことを期待していたが、後述のように g=1 の場合にテンソル積の階数にともなう中心化環の基底の次元の増大と別の数学的事象に関する対応が見つかっただけで、それ以上の成果は得られなかった。

(3)についても 2017 年に大浦学氏との研究により、この群の生成元関係式およびテンソル積表現の中心化環の構造について求めることが出来ていたが、得られた中心化環の次元の増大列は、予想に反して、既存の数学的対象との関連を示唆するものではなく、次元の増大の仕方も非常に大きいもので、その解釈に困難が生じており、本研究ではテンソル積を取る前の表現空間として、自然表現ではなく、適当な部分群の剰余類等を考えてみることで、組合せ論的な繋がりを持つものを発見するとともに、それに対して Diagram 代数としての記述を試みることを計画していた。

生成元・関係式・既約表現の構成

研究計画では、基底の決定と平行して、生成元と関係式を決定することも予定していた。
基底に対応する図を求めてから、生成元と関係式を求めるという手法が本研究の代表者が今まで取ってきた手法であるが、対応する図が簡単には求まらないことが研究当初から予想されており、実際に上記の(1)(2)(3)とも具体的に基底を図に表示することは出来ず、生成元や関係式も得ることはできなかった。しかしながら、テンソル積を既約表現に分解するということについては、指標表を用いた伝統的な手法で解決することにした。

研究の進め方

本研究は共同研究者の大浦学と連絡を取りながら研究を進めた。電子メールで随時疑問点を確認し、数か月ごとにお互いを訪問して直接討論を行うという計画であった。しかしながら、covid-19 の影響により、2020 年度，2021 年度は直接の交流はほとんどできず、かわりに Zoom による討論を行うことにした。

研究集会の参加についても同様で、2020 年度， 2021 年度は対面による出張は非常に限られたものになり、もっぱら Zoom での会合となった。2022 年度と研究機関を 1 年延長した 2023 年度は対面での研究集会参加、対面での討論となり、covid-19 以前の研究スタイルに戻るとともに Zoom を併用した研究集会も開かれるようになり、講演を聞くことが主目的である遠隔地で行われる研究集会などには、直接出向かなくても済むようになり、効率的に旅費を使うことができるようになった。

４．研究成果

口頭発表および学術論文

研究開始初年度である 2019 年度は、これから行う研究についての情報収集が主であり、論文発表ではなく、進捗状況の口頭発表が主なものとなった。８月には本研究の代表者である小須田が山梨大学において同大学教育学部の成瀬弘氏と共同で表現論小研究集会を主催し、小須田自身も「ある複素鏡映群の中心化環の構造」というタイトルで講演し、研究の進捗状況や最終的な目標について述べ、同研究集会の参加者とお互いの研究課題について討論を行った。また、９月と 11 月に横浜国立大学の MM セミナーにおいて「有限群の表現と指標」というタイトルで連続講演を行い、出席者と意見交換をした。こちらは表現論を専門としない研究者向けの講演で、本研究に興味を持ってもらうためのものであった。さらに、2020 年の２月には沖縄で行われた琉球結び目セミナーにて「合コン代数再訪」というタイトルで講演を行った。これは、結び目研究者の会合であるが、Partition 代数や Party 代数を Diagram 代数の側面から解説することで、幾何的な知見から意見をもらうことを意図して講演したものである。

2020 年度は covid-19 の影響で多くの研究集会が取りやめになった。また、オンラインの授業準備や課題の添削等、教育関連にエフォートを費やすことになり、研究の時間がとれなくなった。それでも共同研究者である大浦学氏と大浦氏の学生であった Nur Hamid 氏とともに Toyama Math. J. に論文「Certain subrings in classical invariant theory」を投稿し、編集者を通じたレフェリーとのやり取りで revise を重ねた後 2021 年の 3 月に出版されることになった（注：発行日付は 2020 年の巻 41）。この論文は分担者である大浦学氏の研究分野に関わりが深いもので、大浦が考案した E-多項式（Eisenstein 級数の組合せ論的類似物）を不変式論に応用した結果を載せてある。また 9 月には琉球大学の徳重典英氏と加藤満生氏と共著で Graphs and Combinatorics に論文「Extending Muirhead’s Inequality」を投稿した。

2021 年度は前年度に投稿した論文「Extending Muirhead’s Inequality」の修正に従事した。最終的に 2021 年の 8 月に修正したものが受理され、9 月に出版となった。この論文は、徳重がハイパーグラフに関する研究から、ある不等式が成立することに気づき、その証明を試みたものであるが、完全な解決には至らず、Muirhead の不等式を用いることにより対称単多項式に関する不等式の問題に帰着できること、変数の個数が 12 までは実験により不等式が成り立つことを示したものである。対称単多項式が出現することから、表現論との関連が示唆されており、その方面からの解決も期待されるが、未だ完全な解決には至っていない。また 2022 年１月には大浦氏と大浦氏の学生であった今村博貴氏との共著論文「Note on the permutation group associated to E-polynomials」が Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications から出版された。この論文は本研究開始前の 2018 年頃に最初の原稿を書いたものであるが、本研究で得られた成果を取り込みつつ revise を重ねた結果、ようやく出版となったものである。研究目的に記載した(2)の研究においてテンソル積表現の中心化環の構造と次元について解明したものである。

2022 年度以降は本研究に関する口頭発表や学術論文による成果発表はないが、研究分担者である大浦が関連する研究として以下の講演を行っている。

◯ On weight enumerators, The 3rd International Conference on Mathematics and Applications (Icomathapp 2022), online（2022 年 8 月）
◯ 符号の重み多項式に関する話題，第３９回代数的組合せ論シンポジウム，北九州市（2023 年 6 月）
◯ 符号から得られる様々な多項式について，研究集会「離散構造における多項式不変量の研究」. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所（2023 年 6 月）

また大浦氏の指導する修士の学生の修士論文として以下のものがある。

◯ Some calculations on the finite unitary reflection group associated to coding theory（符号理論に付随する有限複素鏡映群に関する計算）市川耀兵（2022 年 3 月）
◯ Centralizer algebras of the finite unitary reflection groups（有限複素鏡映群の中心化代数）加藤寛隆（2022 年 7 月）

これらはいずれも、本研究の手法により、中心化環の構造を求めたものであり、雑誌に投稿して発表するほどのものではないが、後に続く者の研究によっては引用される可能性があり、印刷物あるいは電子媒体として残しておくべき価値のあるものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Kato Mitsuo、Kosuda Masashi、Tokushige Norihide	４．巻 37
２．論文標題 Extending Muirhead’s Inequality	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Graphs and Combinatorics	６．最初と最後の頁 1923～1941
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-021-02356-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 IMAMURA Hirotaka、KOSUDA Masashi、OURA Manabu	４．巻 9
２．論文標題 Note on the permutation group associated to E-polynomials	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications	６．最初と最後の頁 1～6
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.13069/jacodesmath.1056485	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Nur Hamid, Masashi Kosuda, Manabu Oura	４．巻 41
２．論文標題 Certain subrings in classical invariant theory	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Toyama Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 33, 44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 大浦　学
２．発表標題 On weight enumerators, The 3rd International Conference on Mathematics and Applications
３．学会等名 Icomathapp 2022（国際学会）
４．発表年 2022年

1．発表者名 小須田　雅
2．発表標題 ある複素鏡映群の中心化環の構造
3．学会等名 表現論小研究集会 2019 甲府
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	大浦　学 (Oura Manabu) (50343380)	金沢大学・数物科学系・教授 (13301)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関