様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月１８日現在

機関番号：３４４３７
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４０２

研究課題名（和文）直交多項式と可積分系による逆平面分割の解析

研究課題名（英文）Studies on reverse plane partition with orthogonal polynomials and integrable systems

研究代表者
上岡　修平（Kamioka, Shuhei）

大阪成蹊大学・データサイエンス学部・准教授

研究者番号：７０５４３２９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：逆平面分割は積で表せる「よい」母関数（分配関数）を持つ組合せ論的オブジェクトであり，組合せ論において重要な研究対象である．本研究の主目的は，逆平面分割などの組合せ論的オブジェクトに対して未知のよい母関数を構成すること，および，そこでのアイデアを関連する他問題に応用することである．そのために直交多項式および可積分系をツールとして利用する．主な研究成果は次の通りである．（１）逆平面分割などの組合せ論的オブジェクトに対して，既知のものに含まれない未知のよい母関数をつくった．（２）よい母関数のつくり方を基に，逆平面分割の高速な乱択アルゴリズムを開発した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
組合せ論的オブジェクトである逆平面分割は，それそのものに関する研究だけでなく，数学の他分野に関連付けられたり，物理学などの他領域に応用されたりしている．その背景にはきれいな積の形に表せる「よい母関数」の数学的な扱いやすさがある．また，確率論や統計力学とのつながりも深く，そのような研究では逆平面分割をランダムに生成するアルゴリズム（乱択アルゴリズム）が必要になる．本研究の意義は，直交多項式や可積分系など他分野の道具をうまく用いることで，逆平面分割などのまったく新しい母関数を発見した点，および，逆平面分割の高速な乱択アルゴリズムを開発した点にある．

研究成果の概要（英文）：Reverse plane partitions are combinatorial objects which admit nice generating functions (partition functions) expressible in products. This study aims for discovering new nice generating functions for reverse plane partitions and related combinatorial objects, and for applying the underlying idea to another related problem. Orthogonal polynomials and integrable systems are utilized as tools for that purpose. The main results are the following: (i) Several new nice generating functions for reverse plane partitions and related combinatorial objects are constructed. Those are not special cases of the known ones. (ii) Based on how to construct nice generating functions, a fast algorithm to generate reverse plane partitions at random is developed.

研究分野：数え上げ組合せ論

キーワード：平面分割　組合せ論　直交多項式　可積分系　乱択アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

逆平面分割（reverse plane partition）は，ヤング図形の各セルに，行および列について広義単調増加になるように整数を書き込んだものである．逆平面分割の研究の起源は，きれいな積表示を持つ（つまり因数分解できる）MacMahon 母関数の発見にある[1]．MacMahon 母関数のような積表示を持つ母関数を「よい（nice）母関数」という．よい母関数は数学的に単純でとても扱いやすい．組合せ論における当該分野が，表現論との関連や素粒子物理学への応用など他分野を巻き込みつつ発展しているのは，よい母関数の扱いやすさに根ざす部分が大きい．逆平面分割および関連分野では，よい母関数を新しく発見すること，またそれを他分野に応用することが重要なテーマになっている．

逆平面分割には，MacMahon 母関数やフック型公式など，よい母関数がいくつか知られている．ただし導出方法はアドホックであり，その種類は多くない．本研究の挑戦は，逆平面分割のよい母関数を実際につくることにある．報告者は先行研究において，直交多項式や可積分系の解から逆平面分割のよい母関数を系統的につくる手法を定式化している[2,3]． 特に特定の直交多項式や可積分系の解から，MacMahon 母関数とフック型公式を統合する未知のよい母関数を導出することに成功している．しかし挑戦は道半ばであり，既存の枠に収まらない新しい母関数を求めるという大きなタスクが残っていた．また成果やアイデアの他分野・他問題への応用などはまったく手つかずであった．

２．研究の目的

（１）本研究の主目的は，逆平面分割およびそれに関連する組合せ論的オブジェクトについて，積表示を持つよい母関数（分配関数）を実際につくることである．その際，直交多項式や可積分系の解など，当該分野でこれまで用いられていなかった新しいツールを活用することにより，既存の枠に収まらない新しいよい母関数をつくる． よい母関数の導出に直交多項式や可積分系を応用するというアイデアは，報告者の先行研究[2,3]に基づく本研究独自のものである．

（２）逆平面分割の母関数（generating function）は，考えている範囲にある逆平面分割の情報をひとつにまとめたものである．母関数をつくる過程をうまく「逆転」すれば，考えている範囲にある逆平面分割を，母関数が定める確率分布にしたがってランダムに生成（generate at random）することができる．本研究では，母関数をつくるアイデアの他問題への応用として，逆平面分割の高速な乱択アルゴリズムを開発する．

３．研究の方法

（１）逆平面分割のよい母関数を直交多項式や可積分系の解からつくるという本研究独自のアイデアは，次の観察に基づいている：逆平面分割はある非交叉格子路と一対一に対応するため，組合せ論の Gessel-Viennot の補題を用いると，母関数を行列式で表すことができる．一方，直交多項式のあるクラスである双直交多項式の理論や，可積分系のひとつである離散二次元戸田方程式の解に現れる行列式は，組合せ論的な解釈によりある非交叉格子路の母関数と見なすことができる．上手いことに両者に現れる非交叉格子路は同じものである．さらに都合のよいことに，直交多項式や可積分系の枠組みでは，行列式を別のある変数の積で表す公式がある，あるいはそのような公式を容易につくることができる．以上のことから，逆平面分割（非交叉格子路）の母関数（行列式）を直交多項式や可積分系に現れる変数の積で表す公式がつくれる．

本研究では，このアイデアに基づき逆平面分割のよい母関数を実際につくる．その際，古典直交多項式と呼ばれる一群の直交多項式や，可積分系の特殊解を材料として用いる．また同様の議論が可能な他の組合せ論的オブジェクト（アステカダイヤモンドのドミノタイリング，半標準ヤング盤など）についても研究対象とする．

（２）逆平面分割のよい母関数を直交多項式や可積分系の解からつくる過程は，考えている範囲にあるすべての逆平面分割（非交叉格子路）を，母関数の値を保ったままひとつの自明な逆平面分割にまとめていく作業と見なせる．この過程を素朴に逆転すれば，自明な逆平面分割から始めて，考えている範囲にある逆平面分割の内のひとつをランダムに生成することができる．

本研究では，このアイデアに基づき逆平面分割の乱択アルゴリズムを開発する．その際，母関数をつくる場合と同様に，逆平面分割を非交叉格子路と同一視して考える．本アルゴリズムの中核部分は，逆平面分割と一対一に対応する非交叉格子路をランダムに生成するアルゴリズムになる．

４．研究成果

（１）古典直交多項式および離散可積分系に基づく平面分割のよい母関数の導出

平面分割のよい母関数（分配関数）を，古典直交多項式に属する直交多項式である little q-Jacobi 多項式および Askey-Wilson 多項式から新しく導出した．その際，同多項式の隣接関係式

から離散二次元戸田方程式という可積分系の特殊解をつくり，その特殊解から母関数のウェイトおよび母関数の積表示を具体的に構成した．以下に導出したよい母関数の一例を示す．

$$\sum_{\pi\in \mathrm{PP}(A,B,C)} q^{|\pi|}a^{\mathrm{tr}(\pi)}\varphi(\omega)=\prod_{i=1}^{A}\prod_{j=1}^{B}\prod_{k=1}^{C}\frac{(1-aq^{i+j+k-1})(1-abq^{C+i+j+k-2})}{(1-aq^{i+j+k-2})(1-abq^{C+i+j+k-1})}$$

$$\left(\varphi(\pi)=\prod_{i=1}^{A}\prod_{j=1}^{B}\frac{1-abq^{2C-2\pi_{i,j}+i+j-1}}{1-abq^{2C+i+j-1}}\times\prod_{j=1}^{\min\{A,B\}}\prod_{k=1}^{\pi_{i,i}}\frac{(1-q^{C+j-k})(1-bq^{C+j-k})}{(1-aq^{C+j-k})(1-abq^{C+j-k})}\right)$$

平面分割の研究の端緒となったMacMahon母関数は1個の変数で記述される．またフック型公式の代表例であるトレース母関数は2個の変数を含む．本研究の成果であるlittle q-Jacobi多項式およびAskey-Wilson多項式から得られた新しい母関数は，それぞれ3個および5個というより多くの変数を含む．これは同多項式がこれだけの個数の任意パラメータを含むことに由来する．これだけ増えた変数の意味は，MacMahon 母関数やトレース母関数など既存の枠組みで捉えることはできない．これら新しい母関数は，既知の母関数の拡張になっており，さらに既存のアイデアでは解釈不可能な情報を含んでいる．既存の枠に収まらない新しい側面を持つ母関数といえる．

（２）半標準ヤング盤のよい母関数の導出

半標準ヤング盤は，ヤング図形の各セルに，行について広義単調増加，列について狭義単調増加になるように整数を書き込んだものであり，群の表現論や対称関数の理論において基本的な役割を果たす．逆平面分割とは定義が似ているが，母関数のふるまいは大きく異なる．

本研究では，半標準ヤング盤と双直交多項式の間に，逆平面分割の場合と同様の関係があることを明らかにした．さらにその応用として，古典直交多項式のひとつであるAskey-Wilson多項式から，半標準ヤング盤に対する未知のよい母関数を導出した．このよい母関数は，半標準ヤング盤の理論において基本的であるフック・コンテント公式を，積構造を保ったまま非自明に拡張する．本研究の成果は，半標準ヤング盤の組合せ論の分野に，まったく新しい解析ツールを提示するという意義を持つ．

（３）アステカダイヤモンドのドミノタイリングに対するよい母関数の導出

アステカダイヤモンドのドミノタイリングは，厳密な数え上げが可能な組合せ論的オブジェクトであり，組合せ論の分野でさかんに研究されている[4]．また，可解なダイマー模型のひとつとして，統計力学の分野でも重要な研究対象になっている．

本研究では，可積分系のひとつである離散戸田方程式を用いて，同タイリングに対する未知のよい母関数を構成した．同タイリングのよい母関数としては，Stanleyによる多変数母関数がよく知られている．本研究で構成したよい母関数は，非線形波動のふるまいを表す力学系の解（ソリトン解）を素材としている．特にStanleyの母関数など，既知のよい母関数との包含関係はまったくない．本研究の成果は，組合せ論の分野に，応用可能な新しい観点を提示する点において意義あるものと考える．

（４）逆平面分割の高速な乱択アルゴリズムの開発

（逆）平面分割は，極限形状（limit shape）の存在など，確率論や統計力学の観点からも興味深い性質を持つ．そのような観点から逆平面分割を調べるには，乱択アルゴリズムを用いたシミュレーション実験が不可欠である．特にアルゴリズムは高速であることが望ましい．

本研究では，逆平面分割を非交叉格子路の形でランダムに生成するアルゴリズム（乱択アルゴリズム）を，離散二次元戸田方程式を用いて開発した．図1にアルゴリズムを用いて生成した逆平面分割の例を示す．本アルゴリズムは，可積分系の解から逆平面分割のよい母関数をつくるという本研究のアイデアを，ある意味で逆転して得たものである．同目的の既存アルゴリズムと比較するとき，本アルゴリズムの新規性および利点は次の2点の両立にある．(I) 適用範囲の広さ：一様分布とは限らない多様な確率分布に対して，同じ方法で逆平面分割を生成可能である．(II) 高速性：既存の高速アルゴリズム（Krattenthaler [5]）と理論的な時間計算量は同程度である．Krattenthaler法では不可能な並列化を施せば，さらなる高速化を実現できる．

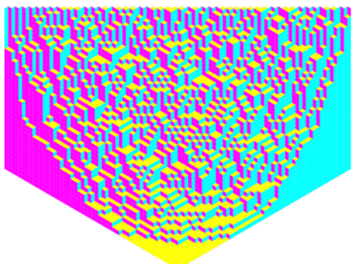

図1:乱択アルゴリズムで生成した逆平面分割

【参考文献】

[1] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, Vol. 2, Cambridge University Press, 1916.

[2] S. Kamioka, A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials, DMTCS proc. BC, 2016 (2016), 671-682.
[3] S. Kamioka, Multiplicative partition functions for reverse plane partitions derived from an integrable dynamical system, Sém. Lothar. Combin. 78B (2017), Article #29.
[4] N. Elkies et al., Alternating-sign matrices and domino tilings. I & II, J. Algebraic Combin. 1 (1992), 111-132 & 219-234.
[5] C. Krattenthaler, Another involution principle-free bijective proof of Stanley's hook-content formula, J. Combin. Ser. A 88 (1999), 66-92.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 上岡修平
２．発表標題 平面分割を離散戸田方程式で調べる
３．学会等名 神戸可積分系セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 上岡修平
２．発表標題 離散可積分系による平面分割の乱択アルゴリズムについて
３．学会等名 第21回計算数学研究会
４．発表年 2023年

１．発表者名 上岡修平
２．発表標題 離散戸田方程式を用いた平面分割の乱択アルゴリズム
３．学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
４．発表年 2023年

１．発表者名 伊藤眞麻，上岡修平
２．発表標題 離散二次元戸田方程式と拡張hook-content公式
３．学会等名 日本応用数理学会第20回研究部会連合発表会
４．発表年 2024年

1．発表者名 上岡修平
2．発表標題 可積分系に基づく平面分割の乱択アルゴリズム
3．学会等名 日本数学会2024年度年会
4．発表年 2024年

1．発表者名 上岡修平
2．発表標題 離散戸田方程式によるランダムウォークのサンプリング
3．学会等名 第20回計算数学研究会
4．発表年 2022年

1．発表者名 上岡修平
2．発表標題 離散戸田方程式を用いた平面分割の乱択アルゴリズム
3．学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4．発表年 2023年

1．発表者名 上岡修平
2．発表標題 離散戸田方程式のソリトン解から得られるタイリングのよい分配関数
3．学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4．発表年 2021年

１．発表者名
伊藤眞麻，上岡修平

２．発表標題
Askey-Wilson多項式から導かれる一般化hook-content公式

３．学会等名
日本応用数理学会2021年度年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
伊藤眞麻，上岡修平

２．発表標題
Askey-Wilson多項式から導かれる拡張hook-content公式

３．学会等名
日本数学会2021年度秋季総合分科会

４．発表年
2021年

１．発表者名
伊藤眞麻，上岡修平

２．発表標題
Askey-Wilson多項式から導く平面分割の積型和公式

３．学会等名
日本数学会2021年度年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
Shuhei Kamioka

２．発表標題
The discrete Toda equation proves the Aztec diamond theorem

３．学会等名
China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019（国際学会）

４．発表年
2019年

1．発表者名 上岡修平
2．発表標題 離散2次元戸田分子と正方格子
3．学会等名 第17回計算数学研究会
4．発表年 2019年

1．発表者名 伊藤眞麻，上岡修平
2．発表標題 双直交多項式から導かれる平面分割の積型母関数
3．学会等名 日本数学会2020年度年会
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関