様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　6 年　6 月　6 日現在

機関番号：１６３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４０３

研究課題名（和文）有限群と頂点作用素代数の様々な予想の解決に向けて

研究課題名（英文）Toward to the affirmative solution of some conjectures on finite groups and vertex operator algebras

研究代表者
安部　利之（Abe, Toshiyuki）

愛媛大学・教育学部・教授

研究者番号：３０３８０２１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において，有限群論及び頂点作用素代数の分野にあるいくつかの予想の解決に取り組んだ。有限群論における予想として（１）「原田予想II」、頂点作用素代数の分野の予想としては（２）「正則頂点代数の自己同型群の有限性」(3)「ムーンシャイン頂点作用素代数の一意性予想」である。成果としては、（１）に関しては、群環のグラム行列との関係が明確になった点、（２）(３)に関しては，Zhu代数と一般頂点作用素、H.LiのΔ作用素のつながり，普遍包絡環の準同型との関係が見つかった点が挙げられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
今回の課題において取り扱った予想は，比較的基本的な予想である．予想(1) は有限群論における共役類と既約指標という基本的量に関する観察に端を発しており、なぜ成立するのかについて専門家からも不思議で魅力的な予想である。その予想に関し、本研究では表現論を経由せず群論のみの解釈で予想解決に取り組むことを明らかにした。予想（２），（３）に関しては頂点作用素代数の黎明期からの予想であるが、本予想にtwisted加群を構成するという観点から取り組んだものである。その過程では、これまで知られてきているいくつかの概念が関連し合っていることに気づくことができた。

研究成果の概要（英文）：In this research, I have tried two conjectures in the theory of finite groups and that of vertex operator algebras.The conjectures I have treated are (1) ``Harada's conjecture II" for finite groups and (2) ``Finiteness of the automorhism group of a holomorphic VOA, (3) ``The uniquness conjecture of the Moonshine VOA" for vertex operator algebra. As for (1), I could give a necessary and sufficient condition for the conjecture by menas of Gramian determinant of the group algebra, and as for (2) and (3), I could find som relationship among Zhu's algebra, generalized vertex operartors, endomorhisms of the universal enveloping algebra and Li's Delta-operators.

研究分野：頂点作用素代数の表現論

キーワード：頂点作用素代数　有限群　表現論　原田予想　Moonshine頂点代数

１．研究開始当初の背景

頂点作用素代数は約 40 年前に共形場理論の数学的モデルとして扱われたが，同時期に存在が示されたモンスター群と楕円 ｊ-関数をつなぐムーンシャイン頂点作用素代数の導入によってその研究には更に強い動機が与えられた.それ以降，表現論の研究が進展し，現在ではモジュラーテンソル圏をはじめとする様々な技術との関連が明確となり,それらの技術を援用しながら c=24 正則頂点作用素代数や W-代数の分類及び関連する構造の研究が幅広く行われている.一方で，導入当初から残っている予想もあり， 現在の理論ではこの予想があるため， いろいろな仮定のもとで展開されている状況である． また有限群論でも構造論と表現論の間の非常に興味深い関係を表す予想もあった．こちらはあまり多くの研究がなされているわけではなかったため,頂点作用素代数の有限自己同型群を扱うための研究という意味でその予想解決に取り組んだ.

２．研究の目的

本研究では，まず原田予想 II の解決を目指しながら群論と頂点作用素代数の関係を再考し，頂点作用素代数の自己同型群に関する様々な予想の解決することを目的としている．具体的には次の予想の解決を目指した.
(予想 1) 原田予想 II の解決
(予想 2) 頂点作用素代数の自己同型群の有限性に関する予想の解決
(予想 3) FLM 予想の解決
原田予想 II とは，有限群について，すべての共役類の基数の積をすべての複素既約次数の積で割ると整数になるという予想である．予想 2 は、単純正規頂点作用素代数は次数 1 の空間が自明であれば自己同型群は有限であるという予想である．予想 3 はモンスター単純群と保形関数の関係を明確にした記念碑的頂点作用素代数として知られるモンスター頂点代数は同を除きただ一つであるという予想である．いずれも非常に簡潔に主張される未解決予想であり，これまでのところ反例が見つからないという意味で予想が正しいと信じられているものである.

３．研究の方法

（予想１）原田予想の解決
原田耕一郎氏の提出しているこの予想は，次のような主張である．まず有限群 G に対し，全ての共役類の基数の積を R(G) とし，全ての複素数体上の非同値な既約 G-加群の次元の積を D(G) とする．このとき比 h(G) = R(G)/D(G)を考える.

原田予想 II: 有限群 G に対し, h(G) は自然数である.

この予想は共役類と既約指標という有限群の表現論に現れる非常に基本的概念のみで主張されているところが興味深い.，更に交換子群の位数で割っても整数であるという強い予想も原田氏及び千吉良氏により提出されており，その意味では整理することが十分期待できる予想である.申請者は原田予想 II が成り立つための一つの十分条件を発見し，公表していた．群 G の指標表から自然数値の不変量ωを構成し，ω= 1 であれば原田予想が成立するというものである．不変量の定義は指標表の成分を用いて定義されるが，その表現論的意味を研究する．一方で，残念ながら，素数 p に対し，p-群の不変量は p の倍数であることも証明したので，p-群の場合には現在の不変量の値から原田予想が成り立つことは主張できないことを意味している．この点に関しては，不変量の精密化または p-群に特化した解決方法を見出すことで解決を目指す.
（予想 2）頂点作用素代数の自己同型群の有限性に関する予想
頂点作用素代数とは無限次元ベクトル空間 V で可算無限個の積を持つ代数系であり，積達は Borcherds 恒等式と呼ばれる条件によって関係している．この演算に真空ベクトルやビラソロ現の存在を仮定している．頂点作用素代数 V の演算及び真空ベクトル，ビラソロ元を保つ線形同型写像を自己同型と呼ぶ. V のすべての自己同型のなす集合 Aut(V) は群をなすが，その中には次数 1 の空間 V_1 の元から標準的に構成される自己同型の生成する内部自己同型群と呼ばれる正規部分群がある．内部自己同型群 Inn(V) は無限群となる一方で，ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$のように, V_1 = 0 である模型も多く知られている．この場合内部自己同型群は自明となり，その自己同型群は有限である．このように頂点作用素代数は無限次元でありながら可算無限個の積による制約により自己同型群が有限になる場合が多く見られ，これまでの多くの例は次を示唆している.

自己同型群の有限性予想: CFT 型正規頂点作用素代数 V の自己同型群は,
V_1 = 0 のとき有限である.

ここで正規とは，任意の弱加群が完全可約となる頂点作用素代数のことを意味する．この予想の解決のために次の課題を設定し，取り組む.
(課題 2-1) 既約表現の同型類のなす集合に自明に作用する自己同型と頂点作用素代数の構造との関係及びそのような自己同型が得られる仕組みを明らかにすること.
(課題 2-2) 外部自己同型群を既約表現の同型類のなす集合の置換群ととらえ，その有限性を導

く構造を明らかにすること
（予想 3）FLM 予想
本予想はムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の一意性に関する予想である. $V^\natural$ は Frenkel-Lepowsky-Meurman (FLM) によって構成され，その自己同型群がモンスター単純群となる. この頂点作用素代数の特徴は次の 4 点が挙げられる.
(1) $V^\natural$ の既約加群は $V^\natural$ 自身と同型である. (2) $V^\natural$ は正規である. (3) $V^\natural$ の中心電荷は 24 である. (4) $V^\natural$ は CFT 型で，次数 1 の空間 $V^\natural_1=0$ である.

このうち(1), (2) を満たす頂点作用素代数は正則である呼ばれる. Frenkel らは $V^\natural$ の構成とともに次の予想を挙げた.

FLM 予想: 中心電荷 24 の CFT-型の正則頂点作用素代数 V で
$V_1 = 0$ を満たす物は $V^\natural$ と同型である.

この予想に関しては次の課題を考えた.
(課題 3) : twisted 加群を構成することで，自己同型を見つける.
twisted 加群は，本来は自己同型に付随して得られる加群の概念であるが，自己同型によらない拡張として田辺氏による(V, T)-代数という物があり，その考え方を更に精密にし，頂点作用素代数に適用することで普遍包絡代数を構成することができる. この普遍包絡代数に非自明な加群が存在すれば，twisted 加群の存在が言える，実際に正規頂点作用素代数 V に対し，twisted 加群を構成することで，逆に自己同型の存在を主張する. ある位数 2 の自己同型が存在すれば，既知の結果から予想が解決される.

４．研究成果
(1)予想 1 に関しては,指標表について更に詳しく考察したところ， 複素数体上の群環の共役和からなる基底を選び， それらで生成される整格子のグラム行列が非常に重要であることを発見した． そして原田予想が成立することとと， そのグラム行列式が共役類の代表の中心加群の位数のすべての積を割り切ることが同値であること証明した.本成果に関しては,
安部 利之, 千吉良 直紀, 原田予想 II の解決に向けて, 数理解析研究所講究録 2189 77-86
に公表した.
更にグラム行列の研究においては，非自明な中心的部分群を持つ有限群を考察し,中心化部分群を考慮した形に原田数を一般化した. この一般化では原田数は中心化部分群が自明な場合に得られるものである. そして，その一般化した原田数の積としてもとの原田数を復元する公式を証明した. 一般化した原田数ではより小さな群の計算に帰着されるが，非整数が現れることも見いだしたため，残念ながら単純に原田予想 II の解決につながらない結果となった.
本成果については,
安部利之, 原田予想 II とグラム行列式, 日本数学会 2023 年度年会 2023 年 3 月 15 日
において研究発表を行った.

(2) 予想 2,3 に関しては，まず頂点作用素代数 V のオービフォールドやコミュタントの分解に関し，宮本氏や Lam 氏と共同で，頂点作用素代数内にその演算を制限した V-internal intertwining 作用素，そして対応する V-internal fusion 則，V-internal fusion 積という概念を導入した．V が(中心電荷が等しいとは限らない)部分頂点作用素代数 U を持ち，V は U とそのコミュタント U^c のテンソル積の加群へ分解できるという仮定から，V に現れる U-加群と U^c-加群いずれに対しても，この fusion 積は結合積を満たすことがわかった．本成果に関しては，
安部利之，On V-internal intertwining operators，代数的組合せ論と関連する群と代数の研究 2019 年 12 月 17 日
安部利之，On V-internal intertwining opearators and their properties，Vertex Operator Algebras and Related Topics 2019 年 8 月 22 日
において講演を行った．
その後，V-internal intertwining 作用素の概念を有限自己同型群のオービフォールド模型に適用することで，頂点作用素代数に現れるオービフォールド模型の既約加群と有限群の既約加群のテンソル積の直和に分解するが，オービフォールド模型の既約加群の V-internal fusion 則と対応する群の既約加群の分岐則が一致することもわかった．
また頂点作用素代数の表現論に関する研究も行った。田辺氏の導入した(V,T)-加群は,松尾氏の指摘により Roitman 氏の導入した一般頂点作用素の一例であることが分かった.そこで Roitman 氏による一般頂点代数の構成を見直すことで,twisted 加群の構成が実現できないかについて考察を深めた。その結果，Roitman 氏による一般頂点作用素と H. Li 氏の導入した Δ作用素を用いた加群の構成の理論との関連を調べることで,一般頂点作用素を頂点代数の自己準同型ととらえなおすことが可能であることがわかった． その自己準同型が Li のΔ作用素で得られるかどうかについて考察を続けたが， 残念ながらΔ作用素としての構成には辿りついていない。Virasoro 頂点代数については，Verma 加群が Virasoro 頂点代数の自己準同型を構成できた。ただその構成は手探りでの構成であったため,既約な最高ウェイト加群に対応する準同型の構成は見出すことができなかった。以上より研究の進展があまりなく,研究期間内で大きな成果には結

びつけることができなかった． ただ、その考察の過程では,Zhu 代数と頂点代数の準同型の間の対応の存在が予想されたので,その方向で研究を進めている途中である。研究が進展した際には,成果を公表したい

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 安部利之	4．巻 2189
2．論文標題 原田予想IIの解決に向けて	5．発行年 2021年
3．雑誌名 数理解析研究所講究録	6．最初と最後の頁 77-86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　3件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 安部利之
2．発表標題 原田予想IIとグラム行列式
3．学会等名 日本数学会 2023年度年会
4．発表年 2023年

1．発表者名 安部　利之
2．発表標題 原田予想IIの解決に向けて
3．学会等名 RIMS 共同研究（公開型）有限群論，代数的組合せ論，頂点代数の研究（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 安部　利之
2．発表標題 On V-internal intertwining opearators and their properties
3．学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名 安部利之
２．発表標題 On V-internal intertwining opearators
３．学会等名 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究（招待講演）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	宮本　雅彦 (Miyamoto Masahiko)	筑波大学・名誉教授 (12101)	
研究協力者	千吉良　直紀 (Chigira Naoki)	熊本大学・大学院先端科学研究部（理学系）数学分野・教授 (17401)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関