

令和 6 年 4 月 17 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03406

研究課題名（和文）頂点作用素代数のモジュラー不変性とテンソル圏に関する研究

研究課題名（英文）Tensor categories and modular invariance of vertex operator algebras

研究代表者

有家 雄介（Arike, Yusuke）

鹿児島大学・法文教育学域教育学系・准教授

研究者番号：50583770

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、頂点作用素（超）代数のモジュラー不変性と呼ばれる性質の証明に現れる一点関数の空間の定義に必要な種々のモジュラー形式の構成法について、これまでに知られていたものをより精密化した構成法を明らかにした。また、一点関数に付随して現れるモジュラー微分方程式の基本的な性質を、頂点作用素超代数の場合にも適用できるように拡張した。この結果を用いて様々な具体的な頂点作用素（超）代数やその捩れ加群上の指標の満たす微分方程式の具体型を計算することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点作用素代数のモジュラー不変性は、数理論理学や整数論の観点からも興味深い対象である。本研究で得られた成果は、頂点作用素超代数の指標の理論やその指標の満たすモジュラー微分方程式の研究を行う際に有用であると考えられる。特に、頂点作用素超代数をモジュラー微分方程式を用いて分類する際には基本的な手法を与えるものであると期待される。

研究成果の概要（英文）：In this project, we study modular invariance of vertex operator (super) algebras, tensor categories arising from vertex operator (super) algebras and modular linear differential equations.

In this research we find a new construction of modular forms used in the definition of one point functions on the torus for vertex operator superalgebras and a new description of modular Wronskians of vector-valued modular forms.

研究分野：代数学

キーワード：頂点作用素代数 モジュラー不変性 テンソル圏

1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数の表現論の重要な問題として、既約加群の分類、フュージョン則の決定が挙げられる。既約加群の分類は Zhu 代数と呼ばれる結合代数の既約加群と頂点作用素代数の既約加群が一対一に対応することから Zhu 代数の既約加群の分類に帰着される。また、フュージョン則は、頂点作用素代数の加群の交絡作用素と呼ばれるもののなすベクトル空間の次元として定義される。頂点作用素代数の表現圏が半単純の場合には、フュージョン積と呼ばれる表現圏に導入されるテンソル積は交絡作用素により定義され、フュージョン則は、2つの加群のフュージョン積の既約分解における重複度となる。このフュージョン則を計算する方法として、直接的に次元を計算する方法と、加群のトレース関数と呼ばれるもののモジュラー変換を用いて計算する方法がある。モジュラー変換を用いる方法は、特にトレース関数の変換則がよくわかっている場合には強力な手段となる。モジュラー変換からフュージョン積(テンソル積)の情報を得る公式はフェアリンデの公式と呼ばれている。

トレース関数のモジュラー不変性の有理性を仮定しない一般化も、擬トレース関数という概念を導入することにより得られている。また、フュージョン積の理論の有理性を仮定しない定式化も近年その構造が明らかになりつつある。したがって、一般的な設定でのフェアリンデの公式を定式化するための基礎は整いつつあるが、幾つかの問題があることが指摘されていた。1つは、モジュラーなテンソル圏の理論は半単純性を仮定しているため、これを適切に半単純とは限らない場合に一般化する必要があること。もう1つは、これまで考えられてきたフェアリンデの公式では基準となる加群を頂点作用素代数自身に取ることができたが、非有理的な場合には明確な基準が与えられていないことである。

2. 研究の目的

上記のような背景を基として、本研究では頂点作用素(超)代数の指標、フュージョン積の構造や性質を研究することにより、フェアリンデの公式を確立することを目的とする研究を行う。より明確には、モジュラー不変性の理論およびフュージョン積の理論を詳細に調べ、これらの関係がどのような場合にうまく定式化されるかを明らかにすることを目的とする。本研究で取り扱う内容は、具体的には以下の3点である。

(1) 交絡作用素と共形ブロックの関係

交絡作用素と射影直線上の共形ブロックの空間との関係について、頂点作用素超代数の場合も含めて明らかにする。

(2) 一点関数の空間の記述

楕円曲線上の一点関数の空間の定式化を頂点作用素超代数の場合に精査し、擬トレース関数とその規定となることを証明する。

(3) フェアリンデの公式の確立

頂点作用素超代数も含む形で、フェアリンデの公式を定式化し、その証明を行う。さらに、これを用いて様々な頂点作用素(超)代数におけるフュージョン積を計算する。

3. 研究の方法

本研究では、まず非有理的な頂点作用素(超)代数に対して、すでに予想されているフェアリンデの公式を検討することから研究を開始する。この際に、擬トレース関数を計算する必要が出てきたが、そこで必要となる Zhu 代数の定義や、楕円曲線上の一点関数の空間に関する情報を明確化するために、一点関数の空間と、頂点作用素超代数の自己同型の関係に着目し、自己同型の情報から、一点関数の空間の構成に必要なモジュラー形式を復元した。さらに、比較的よく知られているリー超代数の Zhu 代数の構造とその偶部分の Zhu 代数との関係を明らかにする研究を行う。この知見を用いて、当初目標としていた具体的な頂点作用素超代数とその偶部分の擬トレース関数や、表現圏の対応を確立するための研究を行う。

次に、一点関数の収束性を証明する際に現れるモジュラー微分方程式と呼ばれる微分方程式に着目し、その解空間と指標の関係を明らかにするための研究を行う。モジュラー微分方程式は、セール微分と呼ばれる微分作用素に関する微分方程式であるが、この微分作用素に関するロンスキアンを詳しく解析することにより、指標がどのような微分方程式の解になるかを判定することで、具体例の場合の指標やそのモジュラー変換の計算を行う。

最後に、頂点作用素超代数に関するフュージョン積の定義に用いられる交絡作用素の性質に関する研究を行う。通常の頂点作用素代数の場合には、交絡作用素は射影直線上の共形ブロックに対応する。上の一点関数に関する研究を参考にしつつ、射影直線上の共形ブロックの定義を確立し、これらの同値性を確立する。

4. 研究成果

本研究における成果として、以下の事項が得られた。

- (1) 頂点作用素代数の捩れ加群上の交絡作用素に関する研究を行い、頂点作用素代数の自己同型と、射影直線上の3点共形ブロックの関係について考察し、交絡作用素の空間と同型になるような余不変量の空間の定義についての結果を得た。
- (2) 特別な頂点作用素超代数の自己同型に対して、それが被覆の自己同型となるような楕円曲線を調べ、現れる楕円関数が被覆の自己同型から誘導される関数体上の自己同型に関する固有関数となることを見出した。
- (3) リー超代数から定まる頂点作用素超代数の捩れ Zhu 代数の構造はリー超代数の偶部分の普遍包絡環の商になることがわかった。
- (4) これまでに知られていた合同部分群よりもより大きな群に一点関数の定義を拡張した。特に、一点関数の空間が超代数構造から定まる自己同型を固定するような合同部分群について不変になることを見出し、さらに、有理的な頂点作用素超代数に対して、その一点関数の空間が、既約表現を基底に持つことも、よく知られている結果の自然な拡張として得られることも証明した。
- (5) 一点関数の満たすモジュラー微分方程式が、今回見出した合同部分群のモジュラー形式を係数に持つように取れることがわかった。特に、頂点作用素超代数の(擬)指標はテータ群と呼ばれる特別な合同部分群により不変となり、さらに、テータ群に関するモジュラー微分方程式を満たすことを示した。
- (6) テータ群に関するモジュラー微分方程式を解析し、特に(擬)指標のつくるベクトル値モジュラー形式の成分の生成する空間がいつモジュラー微分方程式の解空間を与えるかについて、モジュラーロンスキアンと呼ばれる対象を通して調べる方法について考察し、モジュラーロンスキアンは、モジュラーウェーバー関数とデデキントエータ関数を用いて表す公式を得た。
- (7) 極小モデルとよばれる中心電荷を持つ $N=1$ スーパーヴィラソロ代数から構成される頂点作用素超代数の指標はテータ群のモジュラー微分方程式の解空間を生成することを証明した。さらに、ユニタリ系列と呼ばれる中心電荷を持つ $N=2$ スーパーヴィラソロ代数から構成される頂点作用素超代数の指標とモジュラー微分方程式の関係についても考察を進め、いくつかの特別な中心電荷について、既約表現の指標の生成する空間が、モジュラー微分方程式の解空間となることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Arike Yusuke, Nagatomo Kiyokazu	4. 巻 14
2. 論文標題 Vertex operator algebras with central charges 164/5 and 236/7	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 487 ~ 509
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/CNTP.2020.v14.n3.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 有家雄介
2. 発表標題 頂点代数とモジュラー微分方程式
3. 学会等名 代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yusuke Arike
2. 発表標題 Modular linear differential equations on the theta group and vertex operator superalgebras
3. 学会等名 Conference in finite groups and vertex algebras（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yusuke Arike
2. 発表標題 Vertex operator algebras and modular linear differential equations
3. 学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Arike
2. 発表標題 Pseudo-trace functions
3. 学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics in Kumamoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	永友 清和 (Nagatomo Kiyokazu)		
研究協力者	境 優一 (Sakai Yuichi)	久留米工業大学・工学部・准教授	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------