

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03409

研究課題名(和文) テンソル圏を用いた頂点作用素代数の構成とその対称性の研究

研究課題名(英文) Research on construction of vertex operator algebras based on tensor categories and their symmetries

研究代表者

山内 博 (Yamauchi, Hiroshi)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：40452213

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではテンソル圏を用いた頂点作用素代数の拡大理論を扱った。A1型レベル28の例外型共形理め込みに対応するミラー拡大を経由して、テンソル圏の手法によって得られる頂点作用素代数の構成と解析を行った。二通りの構成法を比較することで、この手法で構成できる中心電荷24の正則な頂点作用素代数を同型を除いて8つであることを証明した。この8個の正則な中心電荷24の頂点作用素代数は、テンソル圏の見地からはすべて同じ標準代数に対応する。それらをフィボナッチ拡大でつなげていくことで、中心電荷が24の正の倍数の場合に、未知と思われる非自明な正則な頂点作用素代数の無限系列を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年著しく発展しているテンソル圏の理論を頂点作用素代数の理論に応用し、ムーンシャイン頂点作用素代数をはじめとする重要な頂点作用素代数の新しい構成法を与えた。我々の構成法はフィッシャー群の頂点作用素代数への作用の研究を端緒としているが、一見すると無関係に思われたアフィン頂点作用素代数の共形理め込みを用いている点为非自明であり、大変興味深い。我々の構成法の副産物として、新しい正則頂点作用素代数の無限系列も得られた。この構成法から得られる頂点作用素代数およびその自己同型群の研究は今後の課題となる。

研究成果の概要(英文)：This research project concerns on extensions of vertex operator algebras based on tensor categories. As the mirror extensions of the exceptional conformal embedding of the affine algebra of type A1 at level 28, we have constructed vertex operator algebras and analyzed them. It turns out that up to isomorphisms we have constructed exactly 8 $c=24$ holomorphic vertex operator algebras. These 8 holomorphic vertex operator algebras correspond to the same canonical algebra from a tensor categorical view point. By taking Fibonacci extensions, we further constructed an infinite family of seemingly new holomorphic vertex operator algebras whose central charges are multiples of 24.

研究分野：代数学・頂点作用素代数

キーワード：頂点作用素代数 テンソル圏 対称性

1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は 2 次元共形場理論におけるカイラル代数を数学的に定式化したものである。そのため、よい性質を満たす頂点作用素代数例を構成・分類することは性質のよい共形場理論の構成・分類にも対応し、様々なよい例を構成することは頂点作用素代数の研究における一つの指針となっている。これまで新しい頂点作用素代数を構成する方法としては、自己同型群による不動点をとる操作、部分代数に関する交換団部分代数をとる操作、および単純カレント拡大と呼ばれる性質のよい加群を用いた拡大、これら三つの手法が一般的なものであった。近年は頂点作用素代数に付随するテンソル圏の理論の進展により、よいクラスに属する頂点作用素代数の拡大は、表現圏における代数的対象を用いて記述できることが明らかになった。それゆえ、上述した三つの手法とは異なる頂点作用素代数の新しい構成法として、標準代数と呼ばれるテンソル圏における代数的対象をとる操作、ならびにミラー拡大と呼ばれる交換団部分代数の拡大方法が提唱された。これらの手法は非常に強力であり、既存の手法では構成できない例を、一般的な枠組みにより、たくさん提供できるようになることが期待されていた。

より具体的な課題として、山内は 3 互換群の作用を頂点作用素代数上に実現する研究をラムと共同で行い、23 次フィッシャー群の基本部分集合との対応を考え、 $2+23$ 個のイジング元で生成されるムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\#$ の充満部分代数 $X^{[23]}$ の存在を見出していた。ムーンシャイン頂点作用素代数をこの部分代数 $X^{[23]}$ の拡大として記述できれば、リーチ格子を経由しないムーンシャイン頂点作用素代数の新しい構成法が得られる。しかし、 $V^\#$ を $X^{[23]}$ の拡大と見た場合、これは上述した三つの手法では記述できるものにはなっていない。そのため新手法によるムーンシャイン頂点作用素代数の再構成が求められていた。 $V^\#$ を $X^{[23]}$ の拡大として理解できれば、ムーンシャイン頂点作用素代数の全自己同型群であるモンスター群に対する、23 次フィッシャー群を起点とする、頂点作用素代数の枠組みからの新しい記述・理解が得られる可能性があるため、大変興味深い問題であった。

さて、 $X^{[23]}$ の実現にはレベル 1 の G_2 型アフィン頂点作用素代数 $L_{G_2}(1,0)$ と、24 個のレベル 1 の A_1 型アフィン頂点作用素代数 $L_{A_1}(1,0)^{\otimes 24}$ とのテンソル積が利用できることが山内とラムの先行研究により分かっていた。一方、クロイツヒは例外型共形埋め込みと呼ばれる、レベル 28 の A_1 型アフィン頂点作用素代数 $L_{A_1}(28,0)$ がレベル 1 の G_2 型アフィン頂点作用素代数の充満部分代数であることに着目し、テンソル圏におけるミラー拡大をとることで $X^{[23]}$ の正則頂点作用素代数への拡大があることを発見していた。山内は群論的な考察から、クロイツヒはリー理論に基づいた考察から、奇しくも同じ拡大を考えていたことが判明し、共同研究を行うこととなった。

2. 研究の目的

本研究の目的はテンソル圏の手法を用いて、 $2+23$ 個のイジング元で生成される頂点作用素代数 $X^{[23]}$ の拡大としてムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\#$ の再構成を与え、さらに $X^{[23]}$ の拡大という見地から 23 次フィッシャー群 $F_{i_{23}}$ の $V^\#$ への作用をその全自己同型群であるモンスター群の作用なしに実現し、モンスター群への頂点作用素代数を用いた新たなアプローチを展開することである。既存の $V^\#$ の構成法はどれもリーチ格子に由来するものであり、その意味で自己同型群の立場からみればコンウェイ群からモンスター群へのアプローチとなっている。本研究ではコンウェイ群を経由せず、フィッシャー群からモンスター群を捉えるための頂点作用素代数を用いた新しい理論展開を目指す。

3. 研究の方法

$X^{[23]}$ の正則頂点作用素代数への拡大の分類について考える。先述した通り、この頂点作用素代数は $L_{G_2}(1,0) \otimes L_{A_1}(1,0)^{\otimes 24}$ における $L_{A_1}(28,0)$ の交換団部分代数(これを X^- としよう)の充満部分代数として実現できることが知られていた。 $L_{A_1}(1,0)^{\otimes 24}$ の拡大はすべて単純カレント拡大であり、その拡大は長さ 24 の二元重偶線形重偶符合と一対一に対応している。そして、その極大な拡大は長さ 24 の二元重偶線形自己双対符合に対応し、同型を除いて全部で 9 個あることが知られている。これらは 9 つある 2 標構を持つ 24 次元のユニモジューラー偶格子に対応し、頂点作用素代数としては 9 つの格子頂点作用素代数のいずれかに同型となる。二元重偶線形自己双対符号 C に付随した正則格子頂点作用素代数を V_C とし、 $V_C \otimes L_{G_2}(1,0)$ とのテンソル積をとり、その中で $L_{A_1}(28,0)$ の交換団部分代数をとることで $X^{[23]}$ の拡大が得られる。この交換団部分代数を Y_C としよう。 Y_C は $X^{[23]}$ の拡大ではあるがさらに拡大が可能で、正則ではない。実際、例外的共形埋込み $L_{A_1}(28,0) \subset L_{G_2}(1,0)$ に対応して、 Y_C のミラー拡大 Z_C がとれる。この拡大 Z_C もさらにもう一段階拡大が可能である。表現圏 $\text{Rep } Z_C$ を考えると $\mathcal{C} = \text{Rep } L_{G_2}(1,0)$ としてこれは $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ と圏同値である。圏 \mathcal{C} における単純対象の対角和を $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ においてとることで標準代数と呼ばれる可換代数対象が得られるが、これを圏同値を通じて $\text{Rep } Z_C$ で考えることで Z_C の拡大が定まる。これを V_C としよう。ここまで拡大すると大域次元を計算することで V_C は正則な頂点作用素代数であることが分かる。特に C としてゴーレイ符号をとった場合、 V_C は次数 1 の空間が自明であることが予想され、また、直交するイジング元を含んでいることから、ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\#$ と同型になると期待される。まずはこの手順でムーンシャイン頂点作用素代数が再構成できることを確認した後に、9 つある C それぞれについて V_C の同型類を調べ、 $X^{[23]}$ もしくはその拡大である X^- の拡大として得られる正則頂点作用素代数を分類する。一方、テンソル圏における代数的対象とする手法は、頂点作用素代数の構成に際しては大変強力であるが、圏論的な考察では、拡大として得られる頂点作用素代数は単純対象であり、その射の集まりすなわち自己準同型環は体であるという一般的事実以上のことは分からない。そのため拡大として得られた頂点作用素代数の自己同型群に関しては個別にその内在的な性質を考察する必要がある。我々の場合、フィッシャー群の基本集合に対応する部分代数 $X^{[23]}$ があり、これを手がかりとして、拡大の自己同型群を調べる。以上が基本的な研究方針であった。ここまでの議論では A_1 型アフィン頂点作用素代数の例外的共形埋込みが本質的な役割を果たしているが、当初は A_1 型だけでなく、 A_2 型についても平行して考えていく予定であったが、 A_2 型の場合は当初想定していた以上に話が複雑であることが判明したため、時期課題とすることにして、本研究では A_1 型の場合に集中して研究を行うこととした。

4. 研究成果

$X^{[23]}$ は $2+23$ 個のイジング元で生成されるという著しい性質がある一方で、その拡大として正則頂点作用素代数を構成するには小さすぎるため、これを充満部分代数として含む、ある頂点作用素代数の拡大の分類を行った。研究方法の欄で述べたように、まず交換団部分代数として $X^{[23]}$ の拡大である X^- が定まる。そして、長さ 24 の重偶自己双対符号 C をとる毎に、 X^- の単純カレント拡大として Y_C が得られ、そこにミラー拡大を施すことで Z_C が得られ、さらにテンソル圏における標準代数をとることで正則な中心電荷 24 の頂点作用素代数 V_C が得られる。すなわち、 $X^{[23]} \subset X^- \subset Y_C \subset Z_C \subset V_C$ という拡大の列がある。ここで拡大 $X^- \subset Y_C$ は単純カレント拡大であり、それゆえ X^- は Y_C の有限アーベル群の作用による不動点部分代数となっている。符号 C を用いていることから、愚直にはこの拡大次数は 2^{12} となりそうであるが、 $X^{[23]}$ を構成する段階で C における符号語 (1^{24}) をすでに用いているため、実際の拡大次数は 2^{11} となる。この群作用は $2+23$ 個のイジング元のうちの 23 個が生成する宮本群のそれに一致している。すなわ

ちこの宮本群を H とすれば、その不動点部分代数は $(Y_C)^H = X^-$ となっている。ここで、宮本の自己同型は頂点作用素代数の拡大をとった後にも作用できるという著しい性質があり、それゆえ H は拡大 V_C にも作用する。当初は C 毎に定まる V_C を個別に考えなければならぬと想定されていたが、不動点部分代数 $(V_C)^H$ は C のとり方に依らず、それゆえ V_C は $(V_C)^H$ の単純カレント拡大として統一的に記述できることが分かった。すなわち $(V_C)^H$ の構造を決めてしまえば、 V_C はすべて $(V_C)^H$ の極大単純カレント拡大として決まってしまうことになる。さて、 $(V_C)^H$ は符号 C のとり方に依らないのであったが、特に C としてゴーレイ符号をとった場合、 $(V_C)^H$ の次数 1 の空間は自明であることが直接計算により確かめられる。さらに、その構成法から、直交する二つのイジング元を含んでいることも確認できる。それゆえ、ムーンシャイン頂点作用素代数の特徴づけより、 C がゴーレイ符号の場合には V_C は当初の期待通りムーンシャイン頂点作用素代数と同型になることが分かった。この同型とムーンシャイン頂点作用素代数の構造から、 $(V_C)^H$ はリーチ格子の指数が 2^{11} のある部分格子に付随する格子頂点作用素代数の Z_2 軌道体構成に同型であることが証明できる。それゆえ、他の符号 C を選んだ場合にも、 V_C は 2 標構を持つ 24 次元のユニモジュラー偶格子に付随した正則頂点作用素代数の Z_2 軌道体構成に同型になることが証明できた。このような頂点作用素代数はすでに分類されており、重偶自己双対符号 C は同型を除いて 9 通りあったが、我々の構成法から得られる正則頂点作用素代数 V_C には一組重複があり、同型を除いて 8 通りとなることが証明できた。さらに、ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\#$ における $(V_C)^H$ の安定化部分群も決定した。この群は $S_3 \times 2^{11} \cdot M_{23}$ という構造をしており、23 次フィッシャー群 Fi_{23} の極大部分群 $2^{11} \cdot M_{23}$ を含んでいる。ここで S_3 はモンスター群における Fi_{23} の中心加群に相当する。それゆえ、あと一つ、この S_3 の作用と可換であり、かつ上記の安定化部分群に属さない元を構成できれば、山内とラムの 3 互換群の作用に関する先行研究の結果から、23 次フィッシャー群 Fi_{23} の作用が生じることが 3 互換群の分類結果より分かり、当初の目的を達成できることになる。しかし、この最後のワンピースの部分である例外的自己同型の構成が非常に難しく、残念ながら現在でも継続課題として研究に取り組んでいる。

以上が最初に設定した研究課題に関する研究成果であるが、研究の進捗に伴い、副産物的に得られた成果についても述べたい。まず、上述した正則頂点作用素代数の構成法はすべて中心電荷 24 の場合のみであったが、テンソル圏における可換代数的対象をとる操作を改良すると、中心電荷 24 の倍数の場合にも、さまざまな正則頂点作用素代数が得られることが分かった。これらについてはまだよく分かっておらず、現在も研究中である。これらの成果については現在、クロイツヒ、ラムとの共著論文としてまとめている最中である。また、フィッシャー群の極大部分群としてマッシュー群の作用を見出す研究において、シグマ型イジング元が生成する宮本群を考察する必要があったが、その有限性が問題となった。そこで、シグマ型イジング元で生成される、グライス代数を生ずる OZ 型頂点作用素代数の研究も行い、これについてはジアン、ラムとの共同研究において完全に解決することができた。現在プレプリントとして公開しており、学術雑誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 ARAKAWA Tomoyuki、YAMADA Hiromichi、YAMAUCHI Hiroshi	4. 巻 73
2. 論文標題 Z_k -code vertex operator algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 185-209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/83278327	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Grady J. Connor、Lam Ching Hung、Tener James E.、Yamauchi Hiroshi	4. 巻 61
2. 論文標題 Classification of extremal vertex operator algebras with two simple modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 052302 ~ 052302
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5121446	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Yamada Hiromichi、Yamauchi Hiroshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Simple Current Extensions of Tensor Products of Vertex Operator Algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnaa107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yamada Hiromichi、Yamauchi Hiroshi	4. 巻 573
2. 論文標題 Z_{2k} -code vertex operator algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 451 ~ 475
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.12.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 T. Arakawa, H. Yamada and H. Yamauchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Zk-code vertex operator algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 Tensor categories and holomorphic VOAs
3. 学会等名 Conference in finite groups and vertex algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 An exceptional mirror extension and constructions of $c=24$ holomorphic VOAs
3. 学会等名 Representation Theory XVII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 Categorical vs lattice constructions of the moonshine VOA
3. 学会等名 Modular Forms and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 An exceptional construction of the moonshine VOA
3. 学会等名 Research Seminar Algebra and Mathematical Physics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 Holomorphic extensions related to a basic set of the 2nd largest Fischer group
3. 学会等名 Conference on vertex algebras and related topics, Technische Universitat Darmstadt (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 3-transposition groups arising in VOA theory
3. 学会等名 Majorana, Axial, Veretex Algebras and the Monster (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 Basic sets of Fischer 3-transposition groups and vertex operator algebras
3. 学会等名 Geometric and automorphic aspects of W-algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 23 involutions, Fischer group F_{23} and the moonshine vertex operator algebra
3. 学会等名 Representation Theory XVI (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 Construction of $2+23$ Ising vectors and $2^{11}:M_{23}$
3. 学会等名 Workshop on Vertex Operator Algebras and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Yamauchi
2. 発表標題 A $c=33$ extremal VOA
3. 学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics in Kumamoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	アルバータ大学			
その他の国・地域	中央研究院（中華民国）			
中国	上海交通大学			