

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03413

研究課題名（和文）相対ねじれ（コ）ホモロジー群による特殊関数の研究

研究課題名（英文）Research on special functions by relative twisted (co)homology groups

研究代表者

松本 圭司 (Matsumoto, Keiji)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：30229546

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：相対ねじれ（コ）ホモロジー群を導入することより、これまで除外されたパラメーターが整数になった場合でも Lauricella の超幾何微分方程式系 F_D を解の積分表示から研究することが可能になった。実際に、パラメーターが整数になった場合のこの微分方程式系モノドロミー表現、パッフ形式、ねじれ周期関係式に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何微分方程式系の研究では、パラメーターが整数になる場合は除外していた。現時点では、解の積分表示が線積分となる超幾何微分方程式系 F_D だけに対して、相対ねじれ（コ）ホモロジー群が設定されているが、この方法が多重積分についても一般化されることで、パラメーターが整数になる場合を除外する必要がなくなることが期待される。特に統計分野で現れる超幾何関数は、パラメーターが整数になる場合がとても多いので、この方面への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：By introducing relative twisted (co)homology groups, we can study Lauricella's system F_D of hypergeometric differential equations by Euler type integrals even in case some parameters become integers. In fact, we obtain some results on the monodromy representation, Pfaffian systems and twisted period relations on this system with integral parameters.

研究分野：特殊関数論

キーワード：超幾何関数 超幾何微分方程式系 相対ねじれコホモロジー群 相対ねじれホモロジー群 モノドロミー ねじれ周期関係式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

超幾何微分方程式系の研究では、その方程式系が有する解の Euler 型の積分表示を用いることが有効である。しかし、超幾何微分方程式系に付随するパラメーターが整数になる場合に、広義積分が収束しなくなったり、恒等的に 0 となる関数に退化したりすることが生じて、その効力を失ってしまう問題点があった。

そのような不都合を解消するために、パラメーターが整数になった場合の対処方法の研究が、研究代表者の論文 The monodromy representations of local systems associated with Lauricella's F_D , Kyushu J. Math. 71 (2017), 329–348. 等により、ある程度は進展していた。実際、パラメーターが整数になった場合の基本的な考え方は、整理され始めていた。

これまでの研究に用いてきた Euler 型の積分表示の積分路の空間に関するねじれホモロジー群を相対ねじれホモロジー群に一般化することが有力であることが予想されていた。

一方で、積分する微分形式の空間に関するねじれコホモロジー群のこの一般化に対応する相対ねじれコホモロジー群については、どのように設定するべきかがよくわからない状態であった。

2. 研究の目的

解の積分表示を有する種々の超幾何微分方程式系に対して、パラメーターが非整数条件をみたさなくても、その局所解空間と標準的に同型になる相対ねじれホモロジー群の定義を与え、その双対空間と標準的に同型になる相対ねじれコホモロジー群を設定する。

このように新しく導入された空間と交点形式を介して双対空間となる相対ねじれ(コ)ホモロジー群も定義し、パラメーターが非整数条件をみたさない場合のモノドロミー表現、局所解空間の接続問題、パッフ形式の接続行列、隣接関係式、等を考察する。

また、パラメーターが非整数条件をみたさない状況の場合分けにより、調べられてきた公式や関係式に対して、相対ねじれ(コ)ホモロジー群の導入による統一理論を構成する。

超幾何関数の以外の積分表示を有するリーマンゼータ関数や多重対数関数等に対しても、相対ねじれ(コ)ホモロジー群の設定を試み、特殊関数に対する新しい研究手法の確立を目指す。

3. 研究の方法

(コ)ホモロジー群に関する専門家と研究打合せ(対面形式と Zoom によるオンライン形式の両方)を繰り返し行い、理論を組上げていった。そして、多数の具体例をコンピューターに入力し、数式処理システムを用いて計算することで、得られた定理や命題が正しいことの検証を実施した。

北海道特殊関数セミナーを主催し、この研究に関係する研究者を招いて研究に関する最新の情報交換を行った。

パラメーターが整数でない場合に得られていたガウスの超幾何関数がみたまねじれ周期関係式に興味を有している海外の物理学者と、ねじれ(コ)ホモロジー群と物理学における Feynman Integrals との関係の相互理解を図る研究交流を、物理学者が所属する大学(イタリア)でセミナーを行う形式で実施した。

研究集会で得られた結果を発表して、さまざまな分野の専門家からのコメントをいただき、それらを以後の研究に活用していった。

4. 研究成果

(1) Lauricella により導入された m 変数幾何微分方程式系 F_C は $m+2$ 個のパラメーターを有する階数 2^m のフックス型方程式系である。先行研究として、この微分方程式系のモノドロミー表現は、パラメーターのある種の非整数条件のもとで求められていた。その表現を得るために用いられている解空間の基底を改良することで、パラメーターに課している条件を緩めることができた。そして、その緩めた条件の下でモノドロミー表現が既約になることを示した。この結果をまとめた論文は、2019 年に Hokkaido Math. J. から出版されている。

(2) Appell により導入された 2 変数幾何微分方程式系 F_2 は 5 つのパラメーターを有する階数 4 のフックス型方程式系である。そのパラメーターが $(4/3, 2/3, 2/3, 4/3, 4/3)$ の場合、解の積分表示に現れる被積分関数の冪に整数が現れ、方程式系は可約になり、よく知られているこの方程式系の基本解系は無効になる。このパラメーターの場合に有効になる 4 つの 1 次独立な解を原点の小さな近傍上で与え、それらの連比を解析接続して定まる写像については、先行研究で調べられていた。その写像を複素射影平面内の 6 直線で分岐する巡回 3 重被覆から得られる K3 曲面と Mixed Hodge structure を用いて、K3 曲面族の周期写像として再構成した。そして、その像の解析的集合としての特徴づけを与え、その逆写像をテータ関数を用いて具体的に表示した。この結果をまとめた論文は、2019 年に Publ. Res. Inst. Math. Sci. から出版されている。

(3) 一般超幾何微分方程式 $_3F_2$ を2変数化した階数9の超幾何微分方程式系について、解の積分表示、基本解系、特異点集合、モノドロミー表現、について先行研究で明らかにされていた。その先行研究では、特異点集合の補集合の基本群は3つの loops で生成されることは示されていたが、それらがみだす基本群の元としての関係式を完全に決定した。また、モノドロミー表現が既約になるためのパラメーターに関する十分条件を与えた。この結果をまとめた論文は、2020年に Internat. J. Math. から出版されている。

(4) 超幾何微分方程式系の解が線積分表示を有する Lauricella's F_D に対しては、これまで用いていたねじれホモロジー群を相対ねじれホモロジー群に一般化し、ねじれコホモロジー群を相対ホモロジー群の設定で現れる因子の集合上で零になる微分形式を考えることで、相対ねじれコホモロジー群を定義した。これらの群を導入することにより、どのようなパラメーターに対しても、これまでに知られているねじれ(コ)ホモロジー群による研究手法を用いることができるようになった。モノドロミー表現を決定する周回行列や微分方程式系のパフ形式の接続行列を相対ねじれ(コ)ホモロジー群上に定義される交点形式を用いて単純な形で表示することができた。また、この微分方程式系のモノドロミー表現が自明になるためのパラメーターに関する必要十分条件を与えた。以上の結果をまとめた論文は、Funkcial. Ekvac. から出版予定。

(5) Appell により導入された2変数幾何微分方程式系 F_2 は、パラメーターが $(1/2, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2)$ の場合も、解の積分表示に現れる被積分関数の冪に整数が現れ、方程式系は可約になり、よく知られているこの方程式系の基本解系は無効になる。このパラメーターの場合に有効になる4つの1次独立な解を原点の小さな近傍上で与え、それらの連比を解析接続して定まるシュワルツ写像の像について、その性質を調べた。ここでは、解の積分表示を相対ねじれ(コ)ホモロジー群の自然なペアリリングとみなさずに、方程式系の可約性から解の重積分表示が線積分表示の積に分解する性質を利用して、現れた線積分をある種数3の代数曲線のアーベル・ヤコビ写像とみなして考察して、以下の結果を得た。1. 局所解空間の基底で、すべての周回変換が整数係数の行列で表現されるものを構成し、それらの行列で生成されるモノドロミー群をある種の合同群として特徴づけた。2. シュワルツ写像の像は3次元射影空間内の2次元部分空間であるが、それが上半空間を底空間とし、楕円曲線の直積をファイバーとするファイバー束内の解析的集合の稠密な開集合と同型になることを示し、解析的集合を定める定義式を具体的に与えた。3. シュワルツ写像の逆写像をテータ関数を用いて具体的に与えた。以上の結果をまとめた論文は、2022年に Tohoku Math. J. (2) から出版されていて、その内容は Colloquium at Galatasaray University (Galatasaray University, イスタンブール) で発表された。

(6) パラメーターが $(1/4, 3/4, 1)$ の超幾何微分方程式に関するシュワルツ写像とその逆写像を考察することにより、Jacobi の公式の類似公式を得ることができた。その公式において、上半空間の変数を2倍にした場合に、関数たちの変化を追跡することで、超幾何関数がみだす変数変換公式を与えた。そしてこの公式から2つの拡張された平均を定義して、これらの平均を繰り返し行うことで得られる極限の表示公式を与えた。以上の結果をまとめた論文は、2023年に Hokkaido Math. J. から出版されている。

(7) 一変数の場合には一般超幾何級数になり、多変数で階数が一番低く抑えられた場合には、C型の Lauricella 超幾何級数になる m 変数超幾何級数を導入した。その級数の収束域を決定し、Euler 型の積分表示を与え、その級数がみだす m 個の微分方程式を見つけ、それらで生成される微分方程式系の階数が p^m になることを示した。また、原点の近くの点の近傍におけるこの微分方程式系の基本解系を与えた。そしてその微分方程式系の特異点集合が m 個の座標超平面と p^{m-1} 次の既約超曲面になることを示した。以上の結果は、論文
A system of hypergeometric differential equations in m variables of rank p^m
としてまとめ、preprint 2024 として arXiv:2404.00295 [math.CA] にて公開している。

(8) イタリアで物理学者と行ったセミナーで講演したねじれ(コ)ホモロジー群、交点形式、ねじれ周期関係式に関する内容をまとめて、この分野を勉強する学生向けの講義録を作成した。先方のご厚意により、このあと開催された研究集会「MathemAmplitudes 2019: Intersection Theory & Feynman Integrals」の Proceeding として掲載されることになった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Matsumoto Keiji, Osafune Shohei, Terasoma Tomohide	4. 巻 74
2. 論文標題 Schwarz's map for Appell's second hypergeometric system with quarter integer parameters	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 109-149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20201207	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kaneko Jyoichi, Matsumoto Keiji, Ohara Katsuyoshi	4. 巻 31
2. 論文標題 The structure of a local system associated with a hypergeometric system of rank 9	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2050021 ~ 2050021
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X20500214	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 GOTO Yoshiaki, MATSUMOTO Keiji	4. 巻 48
2. 論文標題 Irreducibility of the monodromy representation of Lauricella's SF_C	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 489 ~ 512
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/1573722015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Matsumoto Keiji, Terasoma Tomohide	4. 巻 55
2. 論文標題 Period Map of Triple Coverings of SP^2 and Mixed Hodge Structures	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 489 ~ 529
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/55-3-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 CHIBA Jun、MATSUMOTO Keiji	4. 巻 52
2. 論文標題 An analogy of Jacobi's formula and its applications	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 463 ~ 494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/2021-572	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Keiji	4. 巻 -
2. 論文標題 Introduction to the Intersection Theory for Twisted Homology and Cohomology Groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceeding of Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.22323/1.383.0007	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Keiji	4. 巻 -
2. 論文標題 Relative twisted homology and cohomology groups associated with Lauricella's F_D	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 松本圭司
2. 発表標題 超幾何保型形式
3. 学会等名 特殊多様体・特殊関数研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Matsumoto Keiji
2. 発表標題 Monodromy representations for several hypergeometric systems by the rigidity
3. 学会等名 Monodromy and Hypergeometric Functions (Galatasaray University, イスタンブール, トルコ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Matsumoto Keiji
2. 発表標題 Monodromy representations for several hypergeometric systems by virtue of intersection forms
3. 学会等名 Monodromy and Hypergeometric Functions (Galatasaray University, イスタンブール, トルコ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Matsumoto Keiji
2. 発表標題 Schwarz's Map for Appell's $F_2(1/2, (1/4, 1/4), (1/2, 1/2))$ and Its Inverse
3. 学会等名 Colloquium at Galatasaray University (Galatasaray University, イスタンブール, トルコ) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本圭司
2. 発表標題 ある2変数超幾何微分方程式系に関するSchwarz写像とその逆写像
3. 学会等名 千葉大学数学教室代数セミナー (千葉大学, 千葉市) (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Keiji Matsumoto (Edit by Tom H. Koorwinder, Jasper V. Stokman)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Cambridge Univesity Press	5. 総ページ数 22
3. 書名 Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project Volume II, Chapter 3	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------