様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　６ 月　６ 日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2021
課題番号：１９Ｋ０３４１７

研究課題名（和文）Frobenius多元環の構造と剛性次元の研究

研究課題名（英文）Study on structures and rigidity dimensions of Frobenius algebras

研究代表者

山形　邦夫（YAMAGATA, Kunio）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・名誉教授

研究者番号：６００１５８４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：フロベニウス多元環について礎石同型類とホモロジー的次元とについて研究した。礎石同型に関する研究については，ある曲面から得られる多元環に礎石同型となる有限次元対称多元環の構造を調べた。また多元環のホモロジー的次元に関しては，加群の準同型多元環が有する大域次元と支配次元との関係に着目して新たな次元を定義し，その次元に関する一諸性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限群の表現の研究に発するフロベニウス多元環については，半世紀以上も未解決となっている問題がある一方，近年では多様体と有限次元多元環との関係が種々明らかになるなどの進展が見られる。本研究課題ではこれらに関連する問題を研究対象として、多元環に新たな次元を導入して有限次元多元環の表現について調べたり，ある多様体から得られる対称多元環の性質を調べることなどにより，フロベニウス多元環の表現研究に貢献するものである。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this project was to develop a theory of socle-equivalence classes of Frobenius algebras and some homological dimensions of Frobenius algebras. We determined symmetric algebras socle-equivalent to the symmetric algebras associated to surfaces, and moreover we introduced a new homological dimension of an algebra and developed fundamental theory on the dimension.

研究分野：代数学

キーワード：　有限次元多元環　フロベニウス多元環　対称多元環　加群　支配次元　礎石同型

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
多元環のホモロジー的次元のうち基本的な次元である大域次元と支配次元という二つの次元との関連が，70 年代以降に加群の準同型多元環を介して広く研究されるようになった。それに関連して，フロベニウス多元環を一般化した森田多元環とホモロジー的次元との関連が本研究代表者と共同研究者によって明らかにされた（文献 ②）。一方フロベニウス多元環の構造を軌道多元環として捉える問題が本研究代表者と共同研究者によって表現論的に最終的に解決された（文献 ③）。また曲面から対称多元環を無数に構成する画期的な研究が始まった（文献①）。

２．研究の目的
有限次元多元環とその上の加群について環論的観点や表現論的観点から解明を目指す。特にフロベニウス多元環やその周辺の多元環について，環やその上の加群圏の構造およびホモロジー的諸性質などを明らかにすることを目的とする。また「Frobenius Algebras, III」の出版のための執筆の継続。

３．研究の方法
本研究課題について海外研究者と共同して研究を行った。そのために共同研究者の研究機関を訪問したり，国際研究集会を利用して研究発表や情報交換などにより研究を実行した。

(1)　準同型多元環が有限大域次元をもつような生成余生成素を基にして有限次元多元環の不変量を新たに定め，その次元について有限性や加群圏の同値による変化などの一般論を調べた。これは中国の二人の研究者とドイツの二人の研究者と共同して研究を行った。

(2)　K. Erdmann–A. Skowroński によって発見され研究された対称多元環について，多元環の構造や礎石同型類による分類について更に詳しく調べるために，二名の発見者やポーランドの二名の研究者等と共同研究を行った。

(3)　国際シンポジウム（日中韓環論シンポジウム（名古屋），多元環表現論国際会議（オンライン開催）（シャールブルック，カナダ））で成果発表や情報交換を行った。

４．研究成果
本研究で対象とする多元環は体上有限次元で結合的かつ単位元を有し，加群は有限次元であるとする。また対称多元環とは，多元環の左正則表現と右正則表現とが相似であるようなフロベニウス多元環のことである。多元環のホモロジー的次元に関する研究と対称多元環の分類に関する研究についてそれぞれ次のような成果を得た。

(1)　有限次元多元環のホモロジー的次元に関して，大域次元が有限である準同型多元環の支配次元（有限になる）の上界をついて考察した。以下加群として生成余生成素（加群圏の生成加群でありかつ余生成加群である加群）を考えその準同型多元環を考える。有限大域次元をもつ準同型多元環の支配次元は定義により有限であり，様々な生成余生成素からこのようにして得られる有限支配次元の上限を多元環の「剛性次元」と定義し，主に剛性次元の有限性と加群圏の同型による剛性次元の普遍性などを研究した。ただし，半単純多元環の大域次元は零であるが，定義により支配次元は無限大になる。したがって，半単純多元環は考察の対象としない。本研究では「剛性次元は常に有限である」という期待の下に種々の多元環の剛性次元について次のような事実を示した。以下，A は体 K 上の有限次元多元環を表わし，半単純多元環ではないと仮定する。

①　予想問題との関連で剛性次元の有限性を示した：
・中山予想（入射的でない多元環の支配次元は有限である）が正しければ自己入射的でない多元環の剛性次元は有限である。

この事実は，剛性次元の有限性は中山予想の正しさを示唆するが，逆に剛性次元が必ずしも有限ではない非入射的多元環の存在を示せば中山予想は成立しないことを示すものでもある。

・ 山形の予想（半単純でない多元環の支配次元は，単純加群の同型類の個数によって制限される）（1996年）が正しければ，半単純でない多元環の剛性次元は有限である。

② 自己入射的でないＡの剛性次元は，Ａをそれ自身の加群と見たときの入射次元に１を加えた値を超えない。特にＡが或る対称多元環上の生成余生成素の準同型多元環であれば，Ａの剛性次元はＡの支配次元を超えない。

③ 自己入射的多元環に対しては，Ｋが完全体でＡが有限群Ｇの群多元環KGである場合，Ａの剛性次元が有限であることは，Ｇの位数が体Ｋの標数の倍数であることと同値である。したがって，半単純ではない有限次元群多元環の剛性次元は有限である。

④ 多元環Ａの安定圏とは，射影加群を通過するＡ準同型写像を零とすることによってＡ加群圏から得られる圏である。与えられた二つの多元環A, Bの安定圏が圏同値であるとき，ＡとＢは安定同値であるという。二つの安定同値な多元環A, Bに対し両者の剛性次元の比較を考察した。剛性次元の普遍性には，結節加群と呼ばれる或る特別な単純加群の存在が関わることが判明した（射影加群を中央項にもつ概分裂系列が存在するとき，その射影加群の根基に同型な加群を結節加群とよぶ。結節加群は単純加群であることが知られており，射影加群の根基には礎石にのみ現われる）。安定同値に関して次の結果を得た。

・多元環ＡからＢへの安定同値函手Ｆに関するある例外的な結節加群が存在しなければ，Ａの剛性次元はＢの剛性次元を超えない。とくにＦの逆函手も例外的な結節加群をもたなければ，ＡとＢの剛性次元は一致する。その結果，Ａが結節点を持たなければ，Ａの剛性次元はＢの剛性次元を超えず，さらにＢも結節加群を持たなければ，両者の剛性次元は一致する。

・安定同値な多元環A, Bが自己入射多元環であるとき，Ａが結節加群を持たなければA, Bの剛性次元は一致する。ＡとＢが結節加群を持つ場合には，両者の剛性次元の差は，結節加群のsyzygy周期の差を超えない。したがって，それらの周期が一致すれば剛性次元も一致する。

この結果から，さらに次のことが成立する：

・安定同値な多元環A, Bが自己入射多元環であるとき，ＡとＢが対象多元環であるか，またはＡとＢの安定圏が三角同値であれば，A, Bの剛性次元は一致する。

⑤ 安定同値が森田型であれば，次のいずれの場合にもＡとＢの剛性次元は一致する：

・ ＡとＢはいずれも単純部分多元環を直積因子に持たない，
・ 基礎体Ｋは完全体である，
・ ＡとＢはともに自己入射的である。

したがって，ＡとＢが導来同値な自己入射多元環であれば両者の剛性次元は一致することが分る。

⑥ 基本的な多元環に対して剛性次元を決定した：

・Ａは単純でない中山多元環とし，直既約な対称多元環とする。Ａの直既約直和因子の個数ｎとＡのベキ零指数をｒとおく。このときr-1はｎの倍数であることが知られている，とくに$r > n$。一般に入射多元環と加群の直和が生成余生成素になることに注意して，Ａと任意の非射影的直既約加群Ｍの直和を考える。このとき直和A+Mの準同型多元環の剛性次元は，加群Ｍの長さｍとn, rの関係に依存して2n, 2, 3という値のいずれかになることを示した：例えば，m=1またはm=r-1のとき剛性次元は2n，あるいはｍが２以上でｎより小であれば３になる。特にM=0とおけばＡ自身の剛性次元 は2n, 2, 3 のいづれかであることが分る。例えば，n=1ならば次元は2, r-1=nならば次元は2nである。

・クロネッカー多元環Ｈ（頂点が２個で同じ方向の矢が２個であるクイバー（有向グラフ）によって定まる遺伝多元環） と任意の自己双対両側Ｈ加群Ｍ（函手Hom(- ,M)が右Ｈ加群圏と左Ｈ加群圏の間の圏双対を引き起こす両側加群Ｍ。例えばＨの双対加群Hom(H, K)は自己双対両側Ｈ加群である）に対して，ＨのＭによる任意のホッホシルト拡大多元環をＡとおくと，Ａの剛性次元は３であることを示した。したがって，ＨのＭによる自明拡大多元環の次元も３であることが分る。

(2) 曲面（連結なコンパクト二次元実多様体）の三角分割から，ある関係式により有限次元対称多元環が定義される。この事実はErdmann–Skowrońskiにより発見され，ある例外的な場合を除いて対称多元環の構造や表現型が研究された（文献①，④）。さらに両者によって曲面から得られる対称多元環の分類の研

究が行われた。本研究課題ではこのような対称多元環について，より一般的な条件のもとにその構造を調べた。以下，基礎体は代数的閉体であるとし多元環は基礎的で（互いに非同型な直既約部分加群の直和に分解される多元環）かつ直既約であるとする（このとき多元環が自己入射的であることとフロベニウスであることは同値である）。
与えられた曲面の任意の三角分割から有向グラフを作り，矢の間に或る置換を定める。この置換による矢の軌道類から自然数全体への対応を任意に定め，これを重み函手とよぶ。また置換による矢の軌道類から体Ｋへの対応（ただし零を対応させない）を任意に定め，これをパラメーター函手とよぶ。この二つの函手を用いて矢の結合の間に関係式を定義して多元環を定めてこれを「重み付曲面多元環」（weighted surface algebra）とよぶ。さらに或るループを持つ点からなる境界点の集合から体Ｋへの対応を任意に定めてこれを境界函手とよぶ。これら三種の函手の間の関係式によって「礎石変形重み付曲面多元環」（socle deformed weighted surface algebra）とよばれる多元環を定義する。三角分割から得られる有向グラフに対して重み函手やパラメーター函手などは任意に与えられることから，互いに非同型な単純加群の個数を変えずに，任意に大きな Loewy 列を有する順表現型対称多元環を無数に構成できることが，Erdmann-Skowroński によって，ある条件のもとに示された。これを基にして次のような結果を得た：

①　ゼロでない境界函手をもつ礎石変形重み付曲面多元環をＡとし，有向グラフは２個以上の頂点をもつと仮定する。このときＡは有限次元対称多元環でとなり，さらに次の性質を持つ：
・Ａは重み付曲面多元環に礎石同型である。Ｋの標数が２でなければＡは重み付曲面多元環に同型になる，
・Ａは順表現型である，
・Ａの周期は４である。

②　Ａは基礎的かつ直既約な対称多元環でグロタンディエック群の階数が２以上であるとする。Ａが重み付曲面多元環Ｓに礎石同型であるとすると，
・曲面が境界点を持たなければＡはＳに同型となり，
・境界点を持つとき，ＡはＳと境界函手から定まる礎石変形重み付曲面多元環に同型となる。
これらから分るように，境界函手は重み付曲面多元環の礎石に関わるものである。

③　Ａは零でない境界函手をもつ礎石変形重み付曲面多元環で，Ｋの標数が２であるとすると，
・Ａが重み付曲面多元環に同型となるのは有向グラフの頂点が２の場合に限る。
・このとき多元環ＡはK. Erdmann（1990 年）によって分類された四元数型対称多元環の一つになる。
実際，多元環のクイバーは二頂点と四本の矢（二頂点を端点に持つ互いの方向の異なる二本の矢，各頂点での
サークル）から成り，Ａを定める関係式が完全に決定される。

＜引用文献＞

①　Karin Erdmann, Andrzej Skowroński,“Weighted surface algebras”, Journal of Algebra 505, 490－558 (2018).

②　Ming Fang, Otto Kerner, Kunio Yamagata,“Canonical bimodules and dominant dimension”, Transactions of American Mathematical Society, 370, 847－872 (2018).

③　Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata,“Selfinjective algebras with hereditary stable slice”, Journal of Algebra 530, 146－162 (2019).

④　Karin Erdmann, Andrzej Skowroński,“Weighted surface algebras: general version”, Journal of Algebra 544, 170－227 (2020).

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Jerzy Bialkowski, Karin Erdmann, Adam Hajduk, Andrzej Skowronski, Kunio Yamagata	4．巻 226
2．論文標題 Socle equivalences of weighted surface algebrasJerzy	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2021.106886	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Andrzej Skowronski, Kunio Yamagata	4．巻 761
2．論文標題 Socle deformations of selfinjective orbit algebras of tilted type	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Advances in Representation Theory of Algebras, Contemporary Mathematics A. M. S.	6．最初と最後の頁 239, 257
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/conm/761/15319	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Honxing Chen, Ming Fang, Otto Kerner, Steffen Koenig, Kunio Yamagata	4．巻 170
2．論文標題 Rigidity dimension of algebras	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6．最初と最後の頁 417, 443
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S0305004119000513	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 山形邦夫	4．巻 －
2．論文標題 フロベニウス多元環の構造について	5．発行年 2020年
3．雑誌名 日本数学会 第65回代数学シンポジウム報告集	6．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Kunio Yamagata
2．発表標題 Deforming ideals of self-injective algebras
3．学会等名 Advances on Representation Theory of Algebras（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 山形邦夫
2．発表標題 フロベニウス多元環の構造について
3．学会等名 第65回代数学シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 Kunio Yamagata
2．発表標題 On a problem of socle-deformations of self-injective orbit algebras
3．学会等名 The 52nd Symposium on ring theory and representation theory（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	Nicolaus Copernicus University			
英国	Oxford University			
ドイツ	Univeristy of Stuttgart	Heinrich-Heine University		
中国	Capital Normal University	Chinese Academy of Sciences		