様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ４ 月 １１ 日現在

機関番号：１７１０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４２５
研究課題名（和文）代数的組合せ論的デザイン理論の総合的研究

研究課題名（英文）Comprehensive research on design theory by algebraic combinatorics

研究代表者
田上　真（Tagami, Makoto）

九州工業大学・大学院情報工学研究院・准教授

研究者番号：５０３８０６７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：Grassmann scheme 上の線形計画限界式とアンチ符号限界式の最適値が一致することを証明した。また，ガロア環上の自己双対行列符号に対するBuilding up 構成法をいくつか与えた。ガロア環上の加群に対する次元定理の拡張や部分加群のタイプに対するいくつかの基礎定理を証明した。Grassmann scheme, bilinear forms scheme のガロア環版を定義し，ガロア環上の行列符号，部分加群符号の基礎を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究はGrassmann schemeおよびBilinear forms scheme は次世代の符号として注目されているネットワーク符号に応用される部分空間符号，行列符号の研究の基盤と言えるものである。本研究は通常の有限体のものではなく，より一般の代数構造上での研究になっており，代数的組合せ論のネットワーク符号へのさらなる応用を期待している。

研究成果の概要（英文）：In Grassmann scheme, we proved that the linear programming bound and the optimal value of anti-code bound are equal. We gave some building up constructions of self-dual matrix codes over Galois rings. We generalized the dimensional formula for linear maps over fields to one over Galois rings and proved some fundamental theorems on types of submodules over Galois rings. We introduced the Galois ring version of Grassmann scheme and bilinear forms scheme and gave a foundation on matrix code and additive subgroup code.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：行列符号　アソシエーションスキーム　部分空間符号　自己双対符号　線形計画限界式　Delsarte理論

１．研究開始当初の背景

研究開始当初まで，代数的組合せ論は種々の空間の有限点配置の研究にすでに大きな役割を果たしていた。一つはミュージンによる 4 次元の kissing number の決定や，ヴィヤゾフスカによる Kepler 予想の 8 次元，24 次元版の解決などである。これらは Delsarte 理論を基礎としており，古典的符号理論においては Hamming アソシエーションスキームの上で考察されていた。本研究課題の研究代表者らにより，球面上の Delsarte 理論を用いて，新しいデザインの概念である調和指数デザインが定義され，Delsarete 限界式の定式化や，小さいサイズの調和指数デザインの分類が行われていた。また，研究代表者らにより，調和指数デザインの Hamming アソシエーションスキーム版が考察され，新しい符号、デザイン理論の基礎が与えられていた。

２．研究の目的

デザイン理論はこれまで Hamming アソシエーションスキームや Johnson アソシエーションスキーム上で古典的符号理論，古典的デザイン理論の枠組みで主に Delsarte 理論を用いて考えられていた。Delsarte 理論はアソシエーションスキーム、さらにはもっと拡張させて 2 点等質空間上で，良い性質をもった有限点配置の研究に強力な道具を与えることができる。研究開始当初の背景で述べた，研究代表者らにより考察された調和指数デザインなどに対する Delsarte 理論をさらに拡張させて，新しいデザイン，符号理論を構築することが本研究の目的である。また，空間自体，すなわち有限点配置を考察するための母体となるアソシエーションスキーム自体も，近年の研究状況，例えばネットワーク符号への応用等に合わせて，新しいものを考察することにより，Delsarte 理論の適用範囲を広げることも目的とした。ネットワーク符号では，q-Johnson, q- Hamming アソシエーションスキーム上の有限点配置の研究となり，そのアソシエーションスキームのガロア環上もしくは finite chain ring 上への拡張を試みた。

３．研究の方法

（１）Kschischang-Kötter(2008)により，ランダムネットワーク符号の部分空間的観点からの研究が行われ，その研究に関連して，Silva-Kschischang-Kötter(2008)によって行列のランク距離的観点からの行列符号の研究が行われた。行列全体にランク距離で関係を入れて得られる Bilinear forms アソシエーションスキーム（q-Hamming スキーム）はすでに Delsarte（1976, 1978）によって，符号理論への応用の観点からよく研究されていた。正則な semi-lattice から得られるアソシエーションスキームとしての観点から，bilinear forms scheme のパラメータの決定や，その上の t-デザインの特徴づけを行っていた。さらに Delsarte は行列符号の双対符号を導入し，ランク重み枚挙多項式のアソシエーションスキームの第 2 固有行列 Q に対する Q-変換として，MacWilliams 恒等式を与えていた。本研究では，Delsarte による上記の仕事のガロア環版への拡張を試みることで，新しいガロア環上の行列符号の代数的組合せ論的研究を行った。ガロア環上の行列にはランクの概念はないので，行列の行ベクトルで生成される部分加群（行空間）のタイプにより，Delsarte による有限体上の Bilinear forms scheme の拡張を試みた。

（２）上記，Delsarte(1978)により，古典的符号理論の類似として導入された行列符号の双対符号によって，行列符号に対しても自己双対符号の概念が考えられる。Morrison（2012）はその博士論文で，行列符号の自己双対符号に同型の概念を定義し，小さいサイズにおいてその分類を行った。また，Galvez-Kim（2020）は小さいサイズの自己双対符号から大きいサイズの自己双対符号を与える Building up-construction を与え，Morrison の分類の拡張を行うことに成功した。Morrison， Galvez-Kim の仕事をガロア環上に拡張を行い，ガロア環上の自己双対行列符号の分類を行うことを考察した。

４．研究成果

（１）近年注目を集めているネットワーク符号において，定次元部分空間符号は重要な役割を持っており（Kschischang-Kötter(2008)），考えられている距離は，その定次元の次元から共通部分空間の次元を引いた Injection 距離で考察される。全体空間の次元を固定した部分空間全体からなる集合上に Injection 距離で関係を定めたアソシエーションスキームが Grassmann scheme であり，定次元部分空間符号はその中の有限点配置とみなすことができる。Grassmann scheme 上の Delsarte 理論は定次元部分空間符号の研究において強力な道具を与える。Delsarte 理論により，符号の最小距離を固定したときに，定次元部分空間符号に対する限界式が得られるが，本研究では特に Linear Programming bound(LP bound)と Anti-code bound (AC bound)を考察した。符号 C の最小距離が d であるとき，定次元符号で，そこに現れる距離が常に d-1 以下であるような符号を C の Anti-code であるという。符号 C の Anti-code の位数で Grassmann scheme の頂点集合の位数を割った値によって，符号 C の位数が抑えられるというのが AC Bound である。AC bound の求め方から，Anti-code で位数が最大のものが，AC bound の最適値を与えることがわかる。この Anti-code の位数の最大値は Hsieh(1975), Frankl-Wilson(1986) によって, Erdös-Ko-Rado の定理として決定されている。よく知られている事実として，AC bound は LP bound を

与える線形計画問題の双対問題の適解における値として得られるので，AC bound は LP bound より常に強くはならず，通常のアソシエーションスキーム上では真に弱くなっている。一方で，Bachoc-Passuello-Vallentin(2013)は AC bound と LP bound が Grassmann scheme 上では常に一致していることをコンピュータによる数値計算で観察していた。本研究の成果の一つとして，実際に AC bound と LP bound は任意のパラメータにおいて，常に一致することを証明した。これは小椋大雅氏との共同研究である。LP bound が実際にどれぐらい良い bound になっているかはよく研究されており，Samorodnitsky(2001)においては binary code 及び constant weight code(Johnson scheme の有限点配置)に対して,LP bound の評価が考察され，一つの予想を立てている。Johnson scheme のパラメータは Grassmann scheme(q-Johnson scheme)のパラメータを q→１と極限を取ることによって得られるので，Johnson scheme 上でも AC Bound と LP bound は一致し，Johnson scheme に対しても LP bound の正確な値を得ることができる。Samorodnitsky(2001)の constant weight code に対する LP bound の評価に対する予想はこのことにより解決されることが期待できる。この研究は現在論文を執筆中である。

（２）自己双対符号は歴史的に古くから，よく研究されている研究対象であり，多くの良い符号が自己双対符号に関連して得られている。例えば，完全符号である Binary [7,4,3] Hamming code や Binary [23,12,7] Golay code はそれぞれ自己双対符号である それらの Extended code である[8,4,4]，[24,12,8] 符号から得られる。このことから，自己双対符号の分類問題は古くから研究されてきた。これら自己双対符号は有限環上にも拡張され，近年もよく研究されている。上記研究の方法で述べたように，Delsarte による行列符号の双対符号が導入され，Morrison，Galvez-Kim による小さいサイズの自己双対行列符号の分類がなされた。本研究の一つの成果として，これら自己双対行列符号をガロア環上で考え，新しい Building up 構成法をいくつか与えた。これは川添聖氏との共同研究である。この Building up 構成法を用いることにより，小さいサイズのガロア環上の自己双対符号の分類を実行することができることを期待している。この研究はまだ進行中である。

（３）有限体上の Grassmann scheme および Bilinear forms scheme はネットワーク符号の研究のため，近年脚光を浴びている研究対象である。本研究ではこれらのアソシエーションスキームをガロア環上のものに拡張させ，新しいアソシエーションスキームを導入した。この研究は小椋大雅氏，川添聖氏との共同研究である。有限体上の Grassmann scheme は定次元部分空間全体の集合に，関係を Injection 距離で入れており，Bilinear forms scheme は行列全体の集合に行列の差の Rank（すなわち行空間の次元）で関係を入れている。どちらとも有限体上のベクトル空間の「次元」を用いているが，これをガロア環上のものに拡張させるために，ガロア環上の加群の「タイプ」を用いた。すなわち，タイプを固定した部分加群全体を頂点集合とし，部分加群同士の関係はその共通部分のタイプによって与えた。この関係の構造を調べるため，ガロア環上のタイプに対して，次元定理の拡張や，部分加群同士に包含関係が存在するとき，それらの部分加群のタイプについて，一方のタイプがもう一方のタイプを決定するための十分条件を与える基礎定理をいくつか与えた。有限体上の Grassmann scheme は一般線形群が定次元部分空間全体の集合への可移な作用による 2 重作用の軌道分解によって関係が与えられるが，ガロア環上の場合では一般にはこのことは成り立たない。しかし，部分加群を階数を固定した自由部分加群全体と制限すると，有限体の場合と同様に，一般線形群の 2 重作用の軌道分解が，共通部分加群のタイプにより与えられることを上記のいくつかの基礎定理を用いて証明し，共通部分のタイプにより，対称アソシエーションスキームとしてのガロア環上の Grassmann scheme を得ることができることを示した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Makoto Tagami and Ryota Hori	４．巻 37
２．論文標題 Harmonic Index t-Designs in the Hamming Scheme for Arbitrary q	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Graphs and Combinatorics	６．最初と最後の頁 1669 - 1685
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-021-02397-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 小椋大雅
２．発表標題 Grassman Scheme 上の符号における Anticode 限界式と線形計画限界式の関係性(田上真との共同研究)
３．学会等名 金沢大学組合せセミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 田上　真
２．発表標題 Hamming scheme 上の調和指数 t－designについて
３．学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム
４．発表年 2019年

１．発表者名 田上　真
２．発表標題 Harmonic index t-designs in Hamming Schemes
３．学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and Its Applications 2019（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 小椋大雅
２．発表標題 The relationship between Anticode Bound and Linear Programming Bound on the Grassman Scheme
３．学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

田上真のページ
https://sites.google.com/site/tagami77/home
Makoto Tagami's Homepage
https://sites.google.com/site/tagami77/
Makoto Tagami's Homepage
https://sites.google.com/site/tagami77/home

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関