

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03427

研究課題名（和文）楕円Calabi-Yau多様体のMordell-Weil群の研究

研究課題名（英文）Mordell-Weil Groups of elliptically-fibered Calabi-Yau manifolds

研究代表者

鎌田 政人（Kuwata, Masato）

中央大学・経済学部・教授

研究者番号：00343640

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：楕円曲面のMordell-Weil格子の理論を、高次元の楕円曲線を一般ファイバーとするファイバー空間である多様体（楕円多様体）に拡張する試みを行った。ある種の楕円多様体のMordell-Weil群に高さ(height)の概念を用いて内積を導入し格子の構造を定義し、いくつかの場合にその構造を具体的に決定した。とくに、ある有理3次元楕円多様体の階数6のMordell-Weil群に格子の構造を付与し、それがE6型のルート格子と同型になることを示した。また、階数が9または10のMordell-Weil群をもつCalabi-Yau多様体についても同様の研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

楕円曲面の理論は代数幾何、解析学、数論など数学の様々な分野だけでなく、理論物理学まで密接に関連して発展してきた大変興味深い研究対象である。楕円曲面の切断のなす群は、交点形式に由来する内積によりMordell-Weil格子と呼ばれる格子の構造を持ち、その構造は楕円曲面の幾何学的性質を調べるなかで重要な役割を果たし、様々な応用を持つ。理論物理学では、高次元のCalabi-Yau楕円多様体のMordell-Weil群には物理的な意味あり、高次元の楕円多様体のMordell-Weil群に格子の構造を導入する試みは、広い分野に波及する可能性をもつ意義ある研究である。

研究成果の概要（英文）：We attempted to extend Mordell-Weil lattice theory for elliptic surfaces to higher-dimensional elliptically fibered varieties. We defined a lattice structure for the Mordell-Weil group of certain elliptic threefolds by introducing an inner product using the notion of height, and determined the structure in some cases. In particular, we have introduced a lattice structure to the rank 6 Mordell-Weil group of certain rational elliptic threefolds, and have shown that it is isomorphic to the root lattice of type E6. We also studied some Calabi-Yau threefolds with Mordell-Weil groups of rank 9 or 10.

研究分野：数論的代数幾何学

キーワード：楕円ファイブレーション Mordell-Weil格子 楕円曲面 Calabi-Yau多様体 K3曲面

1. 研究開始当初の背景

楕円曲面, すなわち楕円曲線を一般ファイバーとするファイバー空間の構造を持つ代数曲面の理論は代数幾何内だけにとどまらず, 解析学, 数論など数学の様々な分野から理論物理学までが交錯し, 互いに密接に関連して発展してきた大変興味深い研究対象である. とくに K3 楕円曲面については, 楕円曲線の族であるというだけでなく, 標準束が自明であるという意味において楕円曲線の 2 次元版と捉えることができ, 二重の意味で楕円曲線とその数論に深く関わっている. 楕円曲面の切断のなす群である Mordell-Weil 群は, 代数曲面上の交点形式に由来する内積「height pairing」によって格子の構造を持ち, Mordell-Weil 格子と呼ばれる. この格子の構造は楕円曲面の幾何学的性質を調べる上で重要な役割を果たす. とくに有理楕円曲面については Mordell-Weil 格子の構造が極めてよく理解されており, 例えば 3 次曲面内の 27 本の直線の配置や, 4 次曲面の 28 本の 2 重接線の配置などの古典的な幾何学の問題も Mordell-Weil 格子を通じて総合的に理解されるようになった. さらに, K3 楕円曲面についても, 球の詰め込み問題への応用など, これまでに多くの成果が得られている.

代数的 Calabi-Yau 多様体は射影多様体であって標準束が自明なものとして定義され, 3 次元 Calabi-Yau 多様体は理論物理学, とくに超弦理論で中心的役割を果たす. K3 曲面は Calabi-Yau 多様体の 2 次元版であり, K3 曲面の研究は高次元 Calabi-Yau 多様体の一般論を構築する際の「実験場」としての役割も果たしている. 近年, 超弦理論の一分野である F-理論において 3 次元以上の Calabi-Yau 多様体上の楕円ファイバー空間の構造の物理的な意味が見いだされ, 盛んに研究されている. そこでは Mordell-Weil 群はゲージ理論の可換部分や湯川選択律に関連するものである. 2 次元 Calabi-Yau 多様体である K3 楕円曲面の Mordell-Weil 格子の研究は, 彼らの本来のターゲットである楕円ファイバー空間の構造をもつ 3 次元 Calabi-Yau 多様体の Mordell-Weil 群を理解するための手本となっており, 物理学者も K3 楕円曲面の階数の大きい Mordell-Weil 格子についての我々の研究には大いに興味を示している.

このような背景のもとで, 楕円ファイバー空間の構造を持つ高次元 Calabi-Yau 多様体について K3 楕円曲面の Mordell-Weil 格子の理論がどのように一般化でき, F-理論など他の分野にいかに応用できるかという問いが自然に湧き上がる. 本研究ではこの問いに対し, それまで主に物理学の視点から研究されていた対象を様々な数学的視点から検討・研究する. 高次元楕円多様体, すなわち楕円ファイバー空間の構造をもつ 3 次元以上の多様体についての代数幾何学的研究はこれまで極小モデル理論の観点からの研究が中心であって, Mordell-Weil 群の研究に関しては今後の発展する余地が大きく残されており, 本研究がその一翼を担うことが期待される.

2. 研究の目的

本研究の長期的な目標は, 高次元 Calabi-Yau 楕円多様体, すなわち楕円ファイバー空間の構造をもつ Calabi-Yau 多様体で 3 次元以上のものについて, 楕円曲面の Mordell-Weil 格子の理論を満足いく形で一般化し, それを Calabi-Yau 多様体の研究に応用することである. Calabi-Yau 多様体に限らず, 高次元楕円多様体一般の Mordell-Weil 群に関する代数幾何的, 数論的な研究には未だに発展途上である. そこで, まず手始めに, 有理楕円多様体で, 特異ファイバーの様子がよくわかっていて Mordell-Weil 群の生成元も決定されているものについて, その Mordell-Weil 群に格子の構造を導入することを目指した. 楕円多様体の Mordell-Weil 群には交叉理論から一種の弱い height pairing が定義できる. 一部の理論物理学者の間では, この交叉理論を用いて Mordell-Weil 格子の理論の高次元へ一般化を試みていた. この試みと楕円曲面の Mordell-Weil 格子の理論を対比し, 格子の構造の導入の可能性を探ることが最初の目標であった.

1990 年代に塩田徹治氏によって構築された Mordell-Weil 格子の理論の核心は楕円曲面 X の Néron-Severi 群 $NS(X)$ の中で, 特異ファイバーの既約成分や 0-切断などを「自明部分」と呼び, 自明部分で生成される部分群 T による $NS(X)$ の商 $NS(X)/T$ を Mordell-Weil 群と関係づけることである. さらに $NS(X)$ の交叉理論による内積は, それ以前から楕円曲線の数論で考察されていた「高さ (height)」の理論と結びつけられた. Néron-Severi 群の階数と Mordell-Weil 群の階数の間に成り立つ不等式である Shioda-Tate の公式は, すでに Wazir によって早くから 3 次元楕円多様体の場合に拡張されており, それは Shioda-Tate-Wazir の公式として物理学者の間では周知のものとなっている. しかし, Wazir の証明に使われている Mordell-Weil 群から $NS(X)$ への写像には高次元特有の難解かつ複雑な部分があり, これが Mordell-Weil 格子の理論の単純な一般化を阻んでいることがわかった. そこで, 差しあたりこの難関を乗り越えられる特別な場合に絞って 2 つの群の間を関係を解明することを目指した.

その後, 有理楕円多様体の特別な場合には曲がりなりにも部分的な結果が得られたので, Calabi-Yau 楕円多様体の場合にも何らかの結果を得ることも目標とした. そこで, すでに一部で研究されていた, 2 つの楕円曲面のファイバー積として得られる Calabi-Yau 楕円多様体の階数が 9 ま

たは 10 の Mordell-Weil 群に格子の構造が付与できるかを調べた。

3. 研究の方法

超弦理論のうちの F-理論において Calabi-Yau 楕円多様体の Mordell-Weil 群に物理的な意味が見いだされて以来、理論物理学者の間でこの方面の研究が盛んに行われていたため、研究期間の初年度にスウェーデンで行われた研究集会「String-Math 2019」に参加し情報収集を行った。楕円曲面の Mordell-Weil 群の研究においては、曲面の交点形式に由来する格子の構造を導入することが本質的に有用であったが、これを高次元楕円多様体に拡張を試みることは自然な発想であり、理論物理学者の間では当時すでにいくつかの試みがなされていることを知った。そこで、まず彼らの方法を再検証し、手持ちの具体例についてその手法を当てはめてみることから始めた。

その試金石として、以前より研究していたレベル 3 構造を持つアーベル曲面のモジュライ空間の研究で現れる 3 次元有理楕円多様体について、その Mordell-Weil 群に格子の構造を定義し、それを決定する問題に取り組んだ。この期間にアメリカ合衆国に滞在する機会を得ていたため、当地で Abihav Kumar 氏と連携し共同研究を行った。しかし、その時期は新型コロナウイルス感染症の影響により他の研究者との交流が制限されていたため、数式処理システムを用いて大規模な計算を行うことに集中し、多くの具体例を収集し検証することに力を入れた。

研究期間後半には移動制限が緩和され、国際研究集会なども従来のように開催されるようになったため、これらのいくつかに積極的に参加してそれまでの結果を発表し、他の研究者との議論を通じて本研究をさらに深めた。とくに、オランダ・フローニンゲンで行われた研究集会で Jaap Top 氏や Remke Kloosterman 氏から有益な助言を得た。

本研究の元々のターゲットは 3 次元以上の Calabi-Yau 多様体であったが、その副産物として 2 次元の Calabi-Yau 多様体である K3 曲面についての結果もいくつか得られた。特に、Adam Logan 氏と Jared Weinstein 氏の研究に加わって、塩田-猪瀬構造と類似の構造を持つ楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 格子についての結果を得た。また、Hershy Kisilevsky 氏からの問いかけにより、楕円曲線の直積の商空間として得られる K3 曲面の有理点に関する共同研究を行った。

4. 研究成果

(1) 主要目標である Calabi-Yau 楕円多様体の研究の前に、まずその試金石となる有理 3 次元楕円多様体で Mordell-Weil 群の階数が大きい場合を中心に研究した。そのうち、特異ファイバーの構造が比較的簡単になるものについては Mordell-Weil 群に格子の構造を定義することができ、いくつかの結果がえられた。とくに主要な結果は、以前より研究してきた Picard 数の大きな K3 曲面の研究で現れる、レベル 3 構造を持つアーベル曲面のモジュライ空間と関連した 3 次元有理楕円多様体についての結果である。この場合、その相対極小モデルの底空間は射影平面を一般の位置にある 9 点でブローアップして得られる Halphen 曲面であり、階数 6 の Mordell-Weil 群を持つ。その群に E6 型のルート格子と同型な格子の構造を付与できることは、底空間を射影平面内の直線に制限して得られる楕円曲面の Mordell-Weil 格子の構造は E8 型のルート格子と同型であることから予想できたが、この場合特異ファイバーはすべて既約であるため、格子の構造を導入するには切断の局所高さ (local height) の考え方をを用いることが有効であることがわかった。そこで、切断の局所の高さに基づいた格子の構造を定義し、さらにそれが E6 型のルート格子と同型であることを示すことができた。さらに、その E6 型の格子は底空間を直線に制限して得られる有理楕円曲面の Mordell-Weil 格子は E8 型のルート格子の部分格子となる。これらの格子の間には位数 3 の巡回群が作用しており、その関係は群論的にも数論的にも興味あるものだが、この関係を詳細に明らかにし、シンプレクティック群 $Sp(4, 3)$ との関係も詳しく調べた。さらに、元々の問題であった、塩田-猪瀬構造と類似の構造を持つ楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 格子について、その Mordell-Weil 群の生成元を具体的に表示する問題についても部分的な結果を得た。

(2) 本研究の主要な目標である 3 次元以上の Calabi-Yau 楕円多様体について、いくつかの試みを行った。そのひとつとして、2 つの楕円曲面のファイバー積として得られる Calabi-Yau 楕円多様体であって、Mordell-Weil 群の階数が 9 または 10 になる族について研究した。この場合の底空間は有理楕円曲面であり、その特異ファイバーの様子は複雑で、切断の局所の高さを定義するのは困難であるが、Mordell-Weil 群の生成元を具体的に決定し、その間の交点形式について考察した。

(3) 元々の興味である、楕円ファイバー空間の構造を通じて Calabi-Yau 多様体の有理点の多寡を調べるという問題についても、新たな試みを行った。楕円曲線 E の 3 次巡回拡大上定義された点は、K3 曲面の一種である一般化 Kummer 曲面の有理点と結びついているが、この事実は 5 次巡回拡大上の点と 4 次元 Calabi-Yau 多様体である一般化 Kummer 多様体の有理点と結びつく。

以前は全くお手上げであったこの問題について、最近の研究の進展を踏まえて新たな成果を得た。

(4) 本研究の主要目標は理論物理学との関連から 3 次元以上の多様体を主な対象としたが、2 次元の Calabi-Yau 多様体である K3 曲面の研究は近年発達が著しく、その研究成果は理論物理にとっても重要な意味を持つという。そこで、従来行ってきた楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 群の応用にも力を入れ、いくつかの楕円曲線の数論への応用を持つ結果を得た。とくに、Hershy Kisilevsky 氏との共同研究で、楕円曲線 E の 6 次巡回拡大上定義された点と、K3 曲面である一般化 Kummer 曲面の有理点との関係を詳しく調べ、従前の 3 次巡回拡大上定義された点に関する定理よりも強い結果を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hershy Kisilevsky, Masato Kuwata	4. 巻 -
2. 論文標題 Ranks of elliptic curves in cyclic sextic extensions of \mathbb{Q}	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.indag.2024.01.00	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 鎌田 政人
2. 発表標題 Double cover of extremal rational elliptic surfaces
3. 学会等名 第 30 回 代数曲面ワークショップ at 常三島（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 鎌田 政人
2. 発表標題 楕円曲線の巡回拡大上定義された有理点について
3. 学会等名 2023大分宮崎整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masato Kuwata
2. 発表標題 Toward the theory of Mordell-Weil lattices of elliptic threefolds
3. 学会等名 Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics 2023（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masato Kuwata
2. 発表標題 Finding points defined over cyclic sextic extensions of an elliptic curve using a K3 surface
3. 学会等名 Curves over finite fields and arithmetic of K3 surfaces (Bernoulli Institute, Rijksuniversiteit Groningen) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Kuwata
2. 発表標題 Jacobians of genus 2 curves with full level 3 structure and the related elliptic fibrations
3. 学会等名 Boston University Number theory seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masato Kuwata
2. 発表標題 Finding points defined over cyclic extensions of an elliptic curve: A geometric approach
3. 学会等名 Brown University Algebra seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田 政人
2. 発表標題 Rational points on generalized Kummer varieties
3. 学会等名 高次元代数多様体の有理点 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------