

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03428

研究課題名(和文)代数多様体の特異点の研究

研究課題名(英文) Research on singularities of algebraic varieties

研究代表者

石井 志保子 (Ishii, Shihoko)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任教授

研究者番号：60202933

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：smooth variety と coherent ideal からなる対の不変数について研究した。成果は次のとおり：

1. 3次元の場合 ideal が "general" であれば不変数 mld は 2 回の weighted blowups で compute される
2. 正標数上の対に対して、その性質を保存する標数 0 の対を対応させることができる。ただし標数 0 の対は ideal ではなく fractional ideal からなる。標数 0 の fractional ideal の性質を調べるのが次なる課題である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対の不変数は無限個の対象を使って定義されることが多い。例えば mld は全ての prime divisor 上の log discrepancies の infimum で定義される。これを有限個の対象を調べるだけで不変数が計算できる、ということを示しているのが上記 1 の結果である。

標数 0 の多様体については、色々な良い性質が成り立ち、対の不変数についても計算がしやすいが、正標数の多様体については多くの困難がある。上記 2 の結果は、困難な正標数の研究をより易しい標数 0 の研究に帰着させる第一歩である。

研究成果の概要(英文)：I researched invariants of a pair consisting of a smooth variety and a coherent ideal. The achievements are the following:

1. If the ideal is "general" on a 3-dimensional variety, then the invariant mld is computed by two weighted blowups.
2. We associate a pair in positive characteristic to a pair in characteristic 0, that inherits the properties of the pair. Here, the pair in characteristic 0 consists of a fractional ideal instead of an ideal. The next goal is to study fractional ideals in characteristic 0.

研究分野：代数幾何学

キーワード：singularities minimal log discrepancy log canonical threshold arc space

## 1. 研究開始当初の背景

代数幾何学における特異点の研究は、1966年のM. Artin の“On isolated rational singularities of surfaces” に始まる。その後、ヨーロッパを中心にして2次元特異点の研究が盛んに行われた。1980年代に入ると

「多様体の世界がどのような様相をしているのか」

という疑問から生まれたMinimal Model Problem (MMP) が代数幾何学の重要な課題となり、MMPで現れる特異点の研究がこの課題の重要なポイントとなった。MMPの研究の飛躍的な発展とともにそれらの特異点の研究も大きな発展を遂げた。これらの研究は特異点解消や小平消滅定理やBertiniの定理などを使ってなされているため基礎体の標数は0であることが基本であった。しかし近年正標数でも特異点解消の存在が示されている2次元3次元の特異点を中心に、高次元でも正標数の体上の特異点が研究され、色々なことが解明されてきた。中には標数0で成立していたことが正標数では成立しないという例などが見つかっている。

特異点研究者の長期的な目標は

「任意標数の体上の特異点の世界がどのような様相をしているのか」

を知ることであるが、そのためには良い不変数を見つけなければならない。双有理幾何学との関連を考えると、多様体の特異点の悪さを測る不変数minimal log discrepancy (mld) や log canonical threshold (lct) が有効な不変数である。これらの不変数はその特異点を持つ多様体上空のすべてのprime divisor で測った指標のinfimum で定義される、つまり無限個のprime divisor を考慮しなければならない。このような場合、

「ある有界な範囲にあるprime divisors を考慮するだけで

すべての特異点のmld やlct が決定されるか」

というのは自然な問題である。このような有限次決定性問題はそれ自身で数学的に意義のある問題であるが、それだけではなく、この問題が解決すれば以下に列挙するような多くの応用が得られることも特筆すべきである。

1. mld のascending chain condition (ACC) (標数0の場合)
2. mld の下半連続性
3. log canonical singularity はopen condition
4. log canonical singularity の小変形による安定性

## 2. 研究の目的

本研究の目的はこの有限次決定問題の中で次の形のものに取り組む。

非特異多様体  $A$  とその上のmultiideal  $a^e$  ( $e$  は正の実数の組) とのペア  $(A, a^e)$  に対して点

$0 \in A$  での  $\text{mld}$  は  $A$  上空の prime divisor を用いて

$$\text{mld}(0; A, a^e) = \inf\{a(E; A, a^e) \mid E \text{ is a prime divisor with center at } 0\}$$

と定義される．ここで  $a(E; A, a^e)$  は prime divisor  $E$  における log discrepancy である．

問題 .

$\dim A$  と  $e$  のみによって決まる  $N$  が存在し，  
 $\text{mld}(0; A, a^e)$  を compute する prime divisor  $E$  が  $N$  回以下の blow up で得られるか？

ただし  $E$  が  $\text{mld}(0; A, a^e)$  を compute するとは  $\text{mld}(0; A, a^e) = a(E; A, a^e)$  を満たすか  $a(E; A, a^e) < 0$  を満たすかのいずれかを意味する．

### 3 . 研究の方法

上記の問題に対し

課題 1 問題内の blowup を weighted blow up に変えて  $\text{mld}$  の有限次決定性定理を示す .

課題 2 標数 0 の場合の結果を仮定して , 正標数の場合の問題

の 2 課題に並行して取り組んだ .

課題 1 の weighted blow up 版は 2 次元の場合に M. Kawakita の結果 (  $\text{mld}(0; A, a^e)$  を compute する prime divisor  $E$  が 1 回の weighted blow up で得られる ) があるので 3 次元の場合に同様の statement を求めるという方法をとった .

課題 2 では標数 0 の世界では特異点解消やコホモロジー消滅定理など色々なツールが整備されているので , 正標数の場合よりも扱いやすいと思われる . そこで正標数のイデアルを標数 0 のイデアルに lift してその良い性質を正標数の世界に移送するという方法を取った .

### 4 . 研究成果

課題 1 に関しては 3 次元の場合にイデアルが general であれば 2 回の weighted blow up で  $\text{mld}$  を compute する prime divisor が作れる , ということを示した . この結果は ZAG seminar や Taiwan National University での online seminar で発表した . ( この時期は COVID によるパンデミックのため研究集会は全て online であった )

課題 2 については正標数のイデアルを , 性質を保ったまま標数 0 の Fractional ideal に lift することができた . したがって標数 0 の世界での fractional ideal の  $\text{mld}$  や  $\text{lct}$  の値の集合の性質がわかれば正標数のイデアルの  $\text{mld}$  や  $\text{lct}$  についても情報が得られることがわかった . ただし今のところ fractional ideal についてはよく研究されていないので , 標数 0 に帰着することはできたが標数 0 で知られている「良い結果」を正標数に持ち込むことは今後の課題である . これについては Luminy や Johns Hopkins 大学 NhaTrang(Vietnam)での研

究集会で講演した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Shihoko Ishii   | 4. 巻<br>176             |
| 2. 論文標題<br>A bound of the number of weighted blow-ups to compute the minimal log discrepancy for smooth 3-folds | 5. 発行年<br>2024年         |
| 3. 雑誌名<br>Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society                                       | 6. 最初と最後の頁<br>495 ~ 515 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1017/S030500412400001X   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)  | 国際共著<br>-               |

|   |                        |
|---|------------------------|
| 1. 著者名<br>Shihoko Ishii   | 4. 巻<br>iv             |
| 2. 論文標題<br>Singularities, the Space of Arcs and Applications to Birational Geometry | 5. 発行年<br>2023年        |
| 3. 雑誌名<br>Handbook of Geometry and Topology of Singularities IV                     | 6. 最初と最後の頁<br>161--210 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/978-3-031-31925-9                               | 査読の有無<br>有             |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)  | 国際共著<br>-              |

|   |                        |
|---|------------------------|
| 1. 著者名<br>Shihoko Ishii   | 4. 巻<br>297            |
| 2. 論文標題<br>The minimal log discrepancies on a smooth surface in positive characteristic | 5. 発行年<br>2021年        |
| 3. 雑誌名<br>Math. Zeitschrift   | 6. 最初と最後の頁<br>389--397 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00209-020-02514-8                                  | 査読の有無<br>有             |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-              |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Shihoko Ishii   | 4. 巻<br>LXIV          |
| 2. 論文標題<br>Inversion of modulo $p$ reduction and a partial descent from characteristic 0 to positive characteristic | 5. 発行年<br>2019年       |
| 3. 雑誌名<br>Romanian Journal of Pure and Applied Math.  | 6. 最初と最後の頁<br>431-459 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>なし  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

[学会発表] 計16件(うち招待講演 16件/うち国際学会 15件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii   |
| 2. 発表標題<br>Singularities of Paris in positive characteristic and characteristic ZERO, Conference on 100 years of Noetherian Rings, IAS Princeton, USA, 2023.6.21 |
| 3. 学会等名<br>Conference on 100 years of Noetherian Rings, IAS Princeton, USA, 2023.6.21 (招待講演)(国際学会)   |
| 4. 発表年<br>2023年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Paris of a smooth variety and an ideal in positive characteristic,                   |
| 3. 学会等名<br>International Workshop on Birational Geometry, Nagoya Univ., 2023.10.11 (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年<br>2023年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Liftings of ideals in positive characteristic to characteristic 0  |
| 3. 学会等名<br>JAMI Conference Higher dimensional algebraic geometry (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Log discrepancies of fractional ideals on a smooth varieties |
| 3. 学会等名<br>Oist silver workshop (招待講演)                                  |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii   |
| 2. 発表標題<br>Liftings of ideals in positive characteristic to characteristic 0 |
| 3. 学会等名<br>Deepning and evolution of singularity theory (招待講演) (国際学会)        |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Introduction to singularities on an algebraic variety                      |
| 3. 学会等名<br>Visitor Program Lecture Series, Indian Women and Mathematics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Singularities in Varieties   |
| 3. 学会等名<br>Conference "Recent Advances in Mathematics and Applications" Don Bosco Univ. India (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii   |
| 2. 発表標題<br>A bridge between positive characteristic and characteristic 0 in terms of an invariant of singularities |
| 3. 学会等名<br>Conference "Faces of Singularity Theory", CIRM, Luminy (招待講演) (国際学会)                                    |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Ideals in positive characteristic and fractional ideal in characteristic 0 |
| 3. 学会等名<br>Workshop:Complex geometry and related topics, Tokyo (招待講演) (国際学会)          |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Uniform bound of the number of weighted blow ups to compute mld in dimension 3 |
| 3. 学会等名<br>Zoom Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)                                  |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shihoko Ishii  |
| 2. 発表標題<br>Uniform bound of the number of weighted blow ups to compute mld in dimension 3 |
| 3. 学会等名<br>OIST Workshop Quantum Math, Singularities and Applications (招待講演) (国際学会)       |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>石井志保子  |
| 2. 発表標題<br>R-multiideal on a smooth surface in positive characteristic  |
| 3. 学会等名<br>RIMS x OIST Joint-workshop: "On the problem of resolution of singularities and its vicinity" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |



|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>石井志保子   |
| 2. 発表標題<br>Birational invariants and arc spaces I, II              |
| 3. 学会等名<br>Workshop Singularities and related topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>石井志保子  |
| 2. 発表標題<br>A description of divisors by arcs and its applications |
| 3. 学会等名<br>Kinosaki Symposium of Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>石井志保子  |
| 2. 発表標題<br>Prime divisor with a good liftability of functions                             |
| 3. 学会等名<br>RIMS Conference: Rational points on higher dimensional varieties (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>石井志保子   |
| 2. 発表標題<br>A new bridge between positive characteristic and characteristic 0 |
| 3. 学会等名<br>International conference on Singularity Theory 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

〔図書〕 計1件

|                     |                 |
|---------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>石井志保子     | 4. 発行年<br>2020年 |
| 2. 出版社<br>丸善出版      | 5. 総ページ数<br>282 |
| 3. 書名<br>特異点入門（改訂版） |                 |

〔産業財産権〕

〔その他〕

|   |
|---|
| Home Page of Shihoko Ishii<br><a href="https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~shihoko/Talks.html">https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~shihoko/Talks.html</a> |
|---|

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|