

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03429

研究課題名(和文) ヤコビ形式を用いた多変数保型形式の明示的・構成的研究

研究課題名(英文) Research of automorphic forms of several variables by Jacobi forms

研究代表者

青木 宏樹 (AOKI, Hiroki)

東京理科大学・創域理工学部数理科学科・教授

研究者番号：10333189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：多変数の保型形式は重要な研究対象であるが、その研究は一般的に1変数の場合と比べてかなり困難である。本研究は、ヤコビ形式を用いた多変数保型形式の研究手法をより深化させることで今まで以上の知見を得る目的で行なわれた。研究期間内における主な研究成果としては「ヤコビ形式のなす空間の消滅次数についての新たな評価」「無限積で構成されるヤコビ形式の特徴づけ」の2つがあげられる。これらはいずれも申請時に明らかにしたいとしていたことに大きく関連しており、コロナ禍の影響もあって期間内に最終解決には至れなかったが、ゴールに大きく近づいていると感じている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数の保型形式は、整数論のみならず幾何学においても重要な研究対象であり、さらに近年では素粒子論においても使われはじめている。本研究では「ヤコビ形式のなす空間の消滅次数についての新たな評価」「無限積で構成されるヤコビ形式の特徴づけ」という2つの成果を得た。これは保型形式そのものに関する新しい結果であると同時に、上述の諸分野の研究に進展をもたらすものである。

研究成果の概要(英文)：Although automorphic forms of several variables are important research subjects, their research is generally more difficult than in the case of one variable. This research work was conducted with the purpose of obtaining more knowledge about automorphic forms of several variables by using Jacobi forms. Two main research results during the period were "new evaluation of the vanishing order of the space of Jacobi forms" and "characterization of Jacobi forms constructed by infinite products." These two results are closely related to what we wanted to clarify at the time of application. Although we were not able to reach a final resolution within the period due to the effects of the COVID pandemic, we feel that we are getting very close to our goal.

研究分野：保型形式

キーワード：保型形式 ヤコビ形式 無限積 整数論 モジュラー群

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

1変数の保型形式(楕円モジュラー形式)は数学において極めて重要な研究対象である。その研究は、Gauss、Jacobi、Weierstrass といった19世紀の大数学者たちの仕事を出発点に、数学全般にわたる、あるいはそれを超えて物理学や情報理論などのさまざまなテーマと関連性を持ちながら、今日まで大いに発展してきた。また、その研究が進むにつれ、研究上の興味と必要性から、1変数の保型形式の一般化あるいは拡張として、さまざまな多変数の保型形式が定義され、研究されてきた。1変数の保型形式と同様、多変数の保型形式も、整数論のみならず幾何学においても重要な研究対象であり、さらに近年では素粒子論においても使われはじめている。また、1変数の保型形式と多変数の保型形式の間、あるいは多変数の保型形式どうしの間には、齋藤-黒川リフトなど、整数論的に非常に興味深い対応がいろいろと知られており、あるいは予想されており、その研究は整数論のなかでも特に重要なテーマのひとつである。しかしながら、多変数の保型形式についての研究は、一般的に1変数の場合と比べてかなり困難であり、1変数では解決されている多くの予想が、多変数では未解決であったり、定式化すらされずに残されたりしている。しかし近年、応募者を含む多くの研究者により、多変数の保型形式を比較的簡単に扱えるケースが次々と見つかってきた。たとえば、Borchersによる無限積を用いた保型形式の構成は、ムーンシャイン予想を解決しただけでなく、整数論のさまざまな分野に応用され、また、K3曲面のモジュライの記述などにも大いに貢献した。応募者も、フーリエ・ヤコビ展開を用いて保型形式を調べる手法を開発し、保型形式環の構造決定問題などに成果をあげることができた。

2. 研究の目的

1変数の保型形式は、特にヘッケ固有形式のL関数が整数論の研究対象として非常に重要であるだけでなく、楕円曲線のモジュライの記述など幾何学の研究対象としても重要である。同様に、多変数の保型形式は、やはりL関数が整数論の研究対象として非常に重要であるだけでなく、K3曲面などの多様体のモジュライの記述など幾何学の研究対象としても重要である。一般的に、多変数の保型形式の研究は1変数の場合と比べてかなり困難であるが、近年、多変数の保型形式を明示的・構成的に扱う手法の発展、たとえばフーリエ・ヤコビ展開やBorchers型無限積などによって、その困難さは徐々に軽減されてきている。これらの研究手法の中心にあるもののひとつが、ヤコビ形式である。本研究は、ヤコビ形式を用いた多変数保型形式の研究手法をより深化させ、今まで以上の知見を得ようとするものである。

3. 研究の方法

研究方法は、基本的には数学として極めて普遍的な方法をとる。すなわち、関連する論文を読み、考え、場合によってはコンピュータを使って試行錯誤を行い、必要に応じて他の研究者と討論を行い、アイデアが思いつけば目標に向かって計算や論証を進めるという方法である。なお、現在、多くの研究者が様々な側面から保型形式の研究を行っているため、研究の遂行にあたっては、周辺分野の研究会に積極的に参加し、関連する研究者と情報交換や研究討論を行う予定である。今までの経験から、多くの研究討論を経ることは、ここに述べたテーマを研究することに直接役立つことはもちろん、研究が「煮詰まった」状態になったさいに新たな観点からのアプローチの方法を発見することにもつながると考えている。申請者は2008年度に1年間、ドイツのジーゲン大学に客員研究員として滞在して研究を行っており、その後も、ほぼ毎年、主に日本およびヨーロッパにおいて、関連する諸分野の世界的に有名な研究者と何度も研究討論を行っている。そのため、研究の進捗状況如何にかかわらず、その時々状況に応じて、本応募研究課題について、国際的な枠組みで有効な研究討論が行えると考えている。

4. 研究成果

申請時には、研究課題である「ヤコビ形式を用いた多変数保型形式の明示的・構成的研究」のなかでも、特に次の3つのテーマについて、詳細な研究を行い、その性質を明らかにしたいと述べた。

- (1) 2次のジーゲル保型形式およびヤコビ形式におけるヘッケ作用素や跡公式の精密化
- (2) Borchers型無限積を使った多変数保型形式の構成法の一般化、特徴付け、および拡張
- (3) 形式的なフーリエ・ヤコビ展開の収束性

これらのテーマに関連して期間内に得られた主な研究成果を述べる前に、本研究課題の位置づけを少しだけ述べる。本研究課題は、2016年度から2018年度にかけて実施した研究課題「多変数保型形式の明示的・構成的研究」(基盤研究(C)16K05076)(以下「前研究課題」と書く)の後継となるものである。したがって、本研究課題の研究対象や研究方法は、前研究課題での研究成

果を踏まえたものとなっている。特に初年度は、前研究課題における研究からシームレスに、その研究成果を拡張する方向に研究を行い、徐々に本研究課題の対象であるヤコビ形式に焦点を当てていく形で研究を行うこととなった。実際、1年目(2019年度)は、前研究課題での研究を引き継ぐ考察(一部は齋藤恭司氏(京都大学名誉教授)との共同研究)と、研究テーマ(1)(3)に関連した新たな研究プロジェクト(伊吹山知義氏(大阪大学名誉教授)およびCris Poor氏(フォード大学教授)などとの共同研究)を並行して実施したが、思いもかけず、前者の研究で考察したことの一部分が後者の研究に応用できることがわかり、後者の研究にかなりの進展があった。その内容は、ヤコビ形式の消滅回数に関するものである。ヤコビ形式のフーリエ展開を見たときに、先頭からどのくらいフーリエ係数が消えていけばヤコビ形式が恒等的にゼロであるといえるかという問題に対し、申請者は今までの結果を大きく改良し、特に(3)のテーマの攻略に大きな手掛かりを与える明示的な結果を得た。この成果は、2022年に研究論文として出版されている。この時点では、研究期間内に相当に大きな成果が得られると、個人的には自信の研究に大いに期待していた。

しかしながら、2年目(2020年度)に入ると突如全世界をコロナ禍が襲い、一部期間はアメリカの研究機関(American Institute of Mathematics)の支援を受け渡米して研究を行う予定であった前述のプロジェクトは中断、オンライン授業対応などで本務校での教育業務なども劇的に忙しくなり、研究データの蓄積などは行えたものの、目に見える研究成果は、しばらくの間、あまりあげられない時期が続いた。

本来の本研究課題の最終年度となる4年目(2022年度)に入り、コロナ禍はようやく落ち着きを見せはじめ、前述のプロジェクトも渡米込みで復活した。しかしながら、残された時間は研究成果をまとめるにはあまりに短く、本研究課題は延長申請により1年間期間を延ばされることとなった。その結果、研究テーマ(1)(3)については、2023年に渡米して共同研究を行う機会を得ることができ、前述の結果をさらに発展させることができた。この研究成果は、前述のプロジェクトの一部として、現在とりまとめの議論が続いており、まとめ次第、発表される見込みである。また、研究テーマ(2)については、2023年度に入っすぐの国際研究集会をきっかけに、複数の研究者から有意義なアドバイスを受けることができ、また共同研究者も見つかって、大いに研究が進展しはじめた。研究成果そのものは2023年度内に得られており、既に研究集会での発表という形で成果を速報している。詳細を記した研究論文については、現在とりまとめの最終段階にあり、まもなく専門誌に投稿の予定である。

以上が主要な研究成果であるが、その他、国際研究集会の主催や、研究者全般向けあるいは一般向けの書籍への論説等の執筆を通じて、当該研究分野全体の発展や研究成果の広範囲にわたる周知などにも努力を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Aoki Hiroki	4. 巻 33
2. 論文標題 On the upper bound of the orders of Jacobi forms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X22500562	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 青木 宏樹	4. 巻 62
2. 論文標題 特集「有限群からその先へ」：「モジュラー群」	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数学セミナー（日本評論社）	6. 最初と最後の頁 30-33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 青木 宏樹	4. 巻 720(2021-10)
2. 論文標題 楕円関数とヤコビ形式	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 26-32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Aoki Hiroki	4. 巻 16
2. 論文標題 Generalization of the Weierstrass p function and Maass lifts of weak Jacobi forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 371 ~ 420
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/PAMQ.2020.v16.n3.a3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Aoki Hiroki, Saito Kyoji	4. 巻 16
2. 論文標題 Modular forms from the Weierstrass functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 967 ~ 980
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2020.v16.n4.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 青木 宏樹	4. 巻 692(2021-2)
2. 論文標題 保型形式と微分作用素	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 46 ~ 47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 青木 宏樹	4. 巻 411
2. 論文標題 サイエンスへの招待「数学者のしている数の世界」	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 理大科学フォーラム	6. 最初と最後の頁 30-35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 青木 宏樹	4. 巻 72-1
2. 論文標題 書評：伊吹山知義：保型形式特論（共立叢書 現代数学の潮流）	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 107-111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hiroki Aoki
2. 発表標題 Infinite products and infinite sums on modular forms
3. 学会等名 Workshop : Algebraicity Problems in Geometry, Analysis, and Number Theory (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 青木宏樹
2. 発表標題 「無限積 = 無限和」型の公式と保型形式（第2話）
3. 学会等名 2023大分宮崎整数論研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroki Aoki
2. 発表標題 Generalization of Jacobi Triple Product Identity and Root Systems
3. 学会等名 Commutative Algebra & Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 青木 宏樹
2. 発表標題 ヤコビ形式の消滅次数について
3. 学会等名 第1回仙台保型形式小集会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 青木 宏樹
2. 発表標題 ワイエルシュトラスの楕円関数から導かれる保型形式について (齋藤恭司氏との共同研究)
3. 学会等名 2020大分整数論研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 青木 宏樹
2. 発表標題 「無限積 = 無限和」型の公式と保型形式
3. 学会等名 第1回大分数論研究集会 (大分大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 青木 宏樹
2. 発表標題 数学者が見ている数の世界
3. 学会等名 「サイエンス夢工房」公開講座 (東京理科大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 青木 宏樹
2. 発表標題 ヤコビ形式の理論と応用
3. 学会等名 東北大学数理科学連携研究センターと東京理科大学総合研究院の連携研究協定ミーティング (東京理科大学)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroki Aoki
2. 発表標題 Formal series of Jacobi forms
3. 学会等名 Oberseminar Institut fuer Algebraische Geometrie, Leibniz Universitaet Hannover (ハノーファー大学・ドイツ) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>東京理科大学研究者情報データベース https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01.php</p>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 第23回整数論オートムワークショップ「Analytic number theoretic aspects of automorphic L-functions」	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 RIMS共同研究(公開型)「保型表現の解析的・数論的研究」	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 第27回整数論サマースクール「構成的ガロア逆問題と不変体の有理性問題」	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 第22回整数論オートムワークショップ「Application of Arthur's multiplicity formula to Siegel modular forms」	開催年 2019年～2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	フォーダム大学	American Institute of mathematics		
ドイツ	ハノーファー大学	ハイデルベルク大学	マンハイム大学	
中国	同済大学			
オーストリア	ウィーン大学			