様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４３１

研究課題名（和文）保型形式論における非可換方向のフーリエ級数展開を基軸とした新しい研究基盤の構築

研究課題名（英文）The construction of new research foundation for automorphic forms based on Fourier expansions in non-abelian directions

研究代表者

成田　宏秋（Narita, Hiro-aki）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：７０４３３３１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究が対象とする保型形式は「保型性」と呼ばれる高度な対称性を有するが、これは三角関数等がもつ周期性を含みこれを説明する表示がFourier展開である。
本研究ではHeisenberg群という非可換な群作用が与える周期性に関するFourier-Jacobi展開の一般理論を、２次シンプレクティック群上の一般のカスプ形式に対して与え、例外群G2の場合でも証明のアイデアをまとめるに至った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
三角関数等の有する周期性はユークリッド空間の座標の平行移動で説明されるが、保型形式が持つ周期性は一般にこれでは説明されない「非可換な周期性」を有することが多い。既存研究ではこの非可換周期性が持つ困難を「可換な周期性」と言えるユークリッド空間の平行移動に落とし込む操作をすることが多いが、本研究では「非可換な周期性」の持つ困難にヤコビ群の表現論などを駆使するなどして立ち向かい既存研究にない理論を打ち立てたことに価値がある。

研究成果の概要（英文）：Automorphic forms, which are the target of this research, have rich symmetry called ``automorphy''. This symmetry includes the ``periodicity'', which trigonometric functions satisfy as is well known. As a series expansion explaining this property, there is a notion of the Fourier expansion. An achievement of this research is the establishment of a general theory of Fourier-Jacobi expansion for cusp forms on the symplectic group of degree two, which respects the periodicity induced by the non-abelian group action of the Heisenberg group. We also provide an idea of a proof for such expansion of cusp forms on the exceptional group of type G2.

研究分野：保型形式の整数論

キーワード：Fourier-Jacobi展開　次数２の斜交群　例外群G2　Heisenberg群の表現論　Jacobi群の表現論　一般化Eichler-Zagier対応　退化指標のWhittaker関数　Fourier-Jacobi型球関数

１．研究開始当初の背景

古典的な保型形式論を、簡約群の調和解析の文脈での表現論的手法を取り入れて、保型形式という関数を「保型表現」という簡約群の表現と見て研究する手法は保型形式を広い枠組みで捉える一般論の構築に威力を発揮してきた。一方、関数としての保型形式を詳しく理解する強力な手法の一つに Fourier 展開があるが、これは名前が示している通り保型形式に Fourier 解析を適用して得られるもので、これは保型形式が満たす保型性が誘導する周期性により可能となる。

保型表現論の文脈でも Fourier 展開の概念は重要であるが、関連して詳しく調べられているのが「Whittaker 模型」あるいは「Whittaker 関数」である。前者は保型表現の極大ユニポテント群の非退化指標からの誘導表現への埋め込みのことを言っており、後者は保型形式の Fourier 展開において非退化指標に対応する展開項に現れる関数であり、Whittaker 模型の関数論的対応物である。保型表現論の文脈では、この Whittaker 模型の概念を用いた「Langlands-Shahidi 手法」としてよく知られた手法により、一般の準分裂簡約群の保型 L 関数の研究が高度に進展したので周知の事実である。

ここで注意したいのは、**Whittaker 模型ないしは Whittaker 関数は保型形式の Fourier 展開のごく一部の項しか見ていないことである。**これは保型形式の「関数としての理解」という観点からは明らかに不十分である。しかし Langlands-Shahidi 手法の大きな成功は、保型形式の Fourier 展開をすべて見なくても保型 L 関数などの数論的に重要な対象の情報は十分取り出せるという認識を強め、Fourier 展開の理論を完璧に整備するという問題意識は薄いままであった印象を受ける。

もう一つ注意したいこととして、保型形式の Fourier 展開をもう少し詳しく述べると、これは簡約群のユニポテント部分群上での Fourier 解析を保型形式に適用することとして説明できる。極大の場合を含めユニポテント群は非可換であることがしばしばであるが、非可換な場合その表現論は指標では全然足りず、無限次元表現の理解が必要である。既存の保型表現論の文脈での研究はそれを避けてきたと言える経緯がある。

非可換なユニポテント群として Heisenberg 群と呼ばれる可換なユニポテント群よりも非可換の度合いを一段階上げた非可換群に関する「**Fourier-Jacobi 展開**」というのが、よく知られた展開の一つとしてあるが、正則保型形式の場合で主に研究が深められてきた。非正則な場合でも符号(2,1)のユニタリー群の場合などでいくつか試みがあるが、数える程度で満足な研究が行われているとは言い難い。

２．研究の目的

本研究の究極の目的は非可換なユニポテント群に関する Fourier 級数展開の一般論を構築することであるが、現実には先行研究が非常に少なく一般的な研究を推進するのは極めて野心的なものと言わざるをえない。低い階数の簡約群でも非正則実解析保型形式も含め一般の保型形式を対象に研究するだけでも十分難しい問題である。そこで**本研究では次数２のシンプレクティック群と例外群 G2 上の実解析的カスプ形式について Heisenberg 群に関する Fourier-Jacobi 展開の理論を発展させることに目標を置いた。**ここでは前者に比べ未知の部分が多い、後者について更に詳しく説明する。四元数離散系列表現を生成する保型形式というのがあり、これは正則保型形式(つまり表現論的には正則離散系列表現を生成する保型形式)の次に扱いやすいと考えられる非正則実解析的保型形式である。四元数離散系列表現は例外群 G2 以外の簡約群にも存在し、例えば符号(1,q)の四元数ユニタリー群 Sp(1,q)にもあるが、この場合の Fourier-Jacobi 展開の理論が研究代表者による研究があり、これを G2 などの他の群で考えたいという自然な動機がある。そして２０２０年に Aaron Pollack 氏による四元数ユニタリー群 Sp(1,q)と符号(2,q)の複素ユニタリー群 SU(2,q)以外の場合で Fourier-Jacobi 展開の理論に関する成果が出版されたが、これは Heisenberg 群の指標の寄与のみを与えていて、無限次元表現の寄与を調べていない、つまり完全な Fourier-Jacobi 展開の理論を与えていないのである。本研究ではこの四元数離散系列表現を生成するカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開を、Pollack 氏が与えなかった Heisenberg 群の無限次元表現の寄与を記述し完全なものにすることが目標となる。現実的には Pollack と同様の広い設定で行うのは厳しいので、２元３次形式の数論の観点からも注目されている例外群 G2 の場合を研究対象とするのである。

３．研究の方法

Fourier 展開の理論を保型形式の関数論的側面から構築するには，上述の Whittaker 関数などの Fourier 展開に現れる関数を知られている特殊関数を使った明示的表示を与え理論を発展させることがもっとも理想的なことである。そしてその存在性が高々１次元で押さえられる、つまり「重複度１定理」が成り立つと、保型形式より Fourier 係数という数論的に有意義な対象を取

り出せるという好都合の状況となる。そして更に Fourier-Jacobi 展開の理論の構築には**「Fourier-Jacobi 型の球関数」**という Heisenberg 群の無限次元表現に付随する一般化 Whittaker 関数の一種と呼ぶべきものを考える必要がある。これは保型表現のレベルでは**「Fourier-Jacobi 模型」**と呼ばれるもので、これも重複度１定理を満たすと考えられているが、我々の対象の一つである次数２のシンプレクティック群の時は多くの場合で知られている。

実はもっと正確には、この Fourier-Jacobi 型の球関数ないしは Fourier-Jacobi 模型は Heisenberg 群の無限次元表現(Stone-von Neumann 表現と呼ばれる)に付随すると最初に述べたが、実際にはこれを Heisenberg 群の群拡大である Jacobi 群と呼ばれる非簡約群の表現に付随して定義されるのが通常である。次数２の実シンプレクティック群の Fourier-Jacobi 型の球関数は平野幹氏による Meijer の G 関数という高度な特殊関数を使った明示公式が知られている。一方例外群 G2 の場合にも Fourier-Jacobi 型の球関数の定義自体はできるが明示公式は全く知られていない。G2 の四元数離散系列表現に対する Fourier-Jacobi 型の球関数の明示的決定は自前で行う必要がある。

そしてこれらの球関数を Fourier-Jacobi 展開に実現するには更に努力が必要である。球関数の理論は保型形式の無限素点の記述に寄与するという意味で「無限素点の局所理論」と呼びたくなるものであるが、それを大域的対象と言える保型形式の Fourier 展開に実現するには、展開の和の記述のための**「大域理論」**が必要である。まず Whittaker 関数の場合は、指標に付随するので Fourier 展開への実現は直ちに分ると考えるのが通常であるが、一般形(generic)の保型表現を生成する保型形式の Fourier-Jacobi 展開の場合は Whittaker 関数の Fourier 展開への寄与が少なからず現れ、そのまとめ方が重要になってくる。このまとめ方には「大域理論」の発想が必要になる。また Fourier-Jacobi 型の球関数の Fourier 展開の実現も勿論必要であるが、Whittaker 関数の場合よりも高度な議論が必要である。そこでこのための**大域理論のアイデアとして考えたのが「Eichler-Zagier 対応」の表現論的一般化**である。これは半整数ウェイトの楕円保型形式と整数ウェイト正則ヤコビ形式の同型対応を与えるものであるが、Maass 形式などの非正則保型形式を含む形でヤコビ群の表現論を使って実現するものである。この発想により Fourier-Jacobi 型の球関数を定義するヤコビ群の表現を Fourier-Jacobi 展開に実現することが可能になり、この球関数の Fourier-Jacobi 展開への実現につながる。

以上の説明は保型形式の「非アデール的定式化」の下での話であるが、本研究では「アデール的定式化」での Fourier-Jacobi 展開を与える試みも行った。これは Jacobi 形式を Jacobi 群のアデール化の二乗可積分保型形式の空間のスペクトル分解の理論を整備した Berndt-Schmidt の理論が重要な基礎となる。この記述は一般性を持つという意味ではメリットを有し、最近の保型形式論の専門家では非アデール的記述よりもアデール的記述に慣れている者が多い印象があることも鑑みて、**アデール的 Fourier-Jacobi 展開の記述も試みた**。しかし、関数としての保型形式の記述にはこの手法では限界があるというデメリットもここに注意しておく。

４．研究成果

(1)Whittaker 関数の急減少性、退化指標の Whittaker 関数：
実２次シンプレクティック群のカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開を、Eichler-Zagier の教科書などで広く知られている正則保型形式の場合以外の非正則実解析的保型形式で記述するには、Whittaker 関数の理解が不可欠である。正則離散系列表現は Whittaker 模型を持たないというよく知られた事実があるが、非正則になると一般形(generic)と呼ばれる表現、つまり Whittaker 模型を持つ表現が大きなクラスを占めて、これは非正則実解析的保型形式の研究に Whittaker 関数が少なからず関わっていることを意味し、実際その重要性は多くの専門家が認識している。

カスプ形式の Fourier 展開に寄与する Whittaker 関数は急減少性を満たす必要があり、実２次シンプレクティック群の場合は一般形表現で明示公式が充実しており、急減少性が十分調査可能の状態にあったが知られている文献では証明がきちんと書かれていない。**本研究では一般形表現に対する既知の Whittaker 関数の明示公式を使って、その急減少性の確認を行った。**

ここで「Whittaker 関数」と言ったら極大ユニポテント部分群の非退化指標に付随して定義されるが、Fourier 展開の研究には「退化指標」に付随する Whittaker 関数についても研究する必要がある。**本研究では同じく一般形の表現について退化指標の Whittaker 関数を明示的に与え、急減少とはならないことを証明し、極大ユニポテント部分群の退化指標の項はカスプ形式の Fourier 展開には現れないことが確かめられた。**

(2)Fourier-Jacobi 型の球関数：
実２次シンプレクティック群の場合は平野氏により結果があり、一般形表現すべてで与えられているとは言えないが、大きい離散系列表現、Jacobi 放物型部分群に付随する一般化主系列表現と通常の意味での主系列表現の場合で与えられており、多くの一般形表現で明示公式が与えられ重複度１定理も証明されている。しかし残った Siegel 放物型部分群に付随する一般化主系列表現については問題が難しいと考え本研究では研究対象としなかった。以上からカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開に必要な球関数は実２次シンプレクティック群の場合多くの場合で揃っていると言える。

一方、もう一つの研究対象としている例外群 G2 上の四元数離散系列表現を生成するカスプ形

式については Heisenberg 群の指標に対する一般化 Whittaker 関数が Aaron Pollack 氏により与えられているが、Fourier-Jacobi 展開の完成にはこちらについても Fourier-Jacobi 型球関数の研究が必要となる。Heisenberg 群の指標は中心で自明ということで特徴づけられるが、**中心で非自明な Stone-von Neumann 表現と呼ばれる無限次元表現の場合でこの球関数を考えた。** Pollack の研究と同様に Dirac-Schmid 作用素で消えるという条件から生じる微分方程式を解くことで明示公式を求めたが、保型形式の Fourier 展開に寄与するために満たすべき「**緩増加条件(多項式増大度であること)**」**を満たさないという結果が導かれた。これを受けて Jacobi 群の既約ユニタリー表現に付随する本来の意味での Fourier-Jacobi 型の球関数を上記の微分方程式を解くという手法で求めたが、今度は０になるという結果が導かれてしまった。**以上の結果は、Gan-Gross-Savin による、G2 の四元数離散系列表現を生成する「レベル１」のカスプ形式が指標に付随する Fourier 係数のみで決定されるという定理に矛盾しないが、この場合は微分方程式が A4 で合計６ページに及ぶもので**結果のチェックは何度もしたものの更にチェックし検証を続ける予定である。**前者の Stone-von Neumann 表現に付随する Fourier-Jacobi 型球関数の場合は、東北大学の山内卓也氏にも確認してもらっており、正しいと考えている。

(3)**Eichler-Zagier 対応の表現論的一般化：**
Eichler-Zagier 対応とは古典的な正則 Jacobi カスプ形式のテータ分解から自然に生じる、正則ヤコビカスプ形式と半整数ウェイトのベクトル値楕円カスプ形式の同型対応であるが、これを Maass ヤコビカスプ形式などの一般の実解析ヤコビカスプ形式へ拡張することが本研究の対象とする一般的 Fourier-Jacobi 展開に必要である。そしてこれが Fourier-Jacobi 型の球関数の Fourier-Jacobi 展開に実現する大事なポイントとなる。本研究ではベクトル値楕円保型形式を Heisenberg 群の表現の絡作用素(Heisenberg 群の保型形式)に値を取る保型形式と解釈することによって、**Eichler-Zagier 対応を表現論的手法で Maass カスプヤコビ形式まで拡張することに成功した。**これにより平野氏が明示的に与えた Fourier-Jacobi 型球関数のすべてを次数２のシンプレクティック群上のカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開に実現する手法を与えることができた。一方、もう一つの研究対象である例外群 G2 の四元数離散系列を生成するカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開については、(2)で述べた Fourier-Jacobi 型の球関数が０になるという結果が正しいと仮定すると、この場合では Eichler-Zagier 対応に相当する大域理論は不要で、現時点では研究対象にならないと認識している。ただ Fourier-Jacobi 展開の理論とは独立した面白さがあるという意味ではそれ自身研究対象になり得ることはコメントしておく。

(4)**Fourier-Jacobi 展開：**
これまで述べた(1)～(3)の結果から、２次のシンプレクティック群上の一般の実解析的カスプ形式と例外群 G2 の四元数離散系列表現を生成するカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開の理論を与える材料の多くが(後者について Fourier-Jacobi 模型の結果が正しいと仮定すると)揃っていると言える。しかし、非正則の場合、既に知られている正則カスプ形式の場合には現れない Whittaker 関数(G2 の場合は一般化 Whittaker 関数)の寄与を用いて、既存の研究では知られていない別の寄与の仕方があることをここに報告する必要がある。(3)で述べた Eichler-Zagier 対応はヤコビ群の２乗可積分保型形式の空間が持つ離散スペクトルの Fourier-Jacobi 展開への寄与を説明するが、実は記述の２次シンプレクティック群または例外群 G2 のカスプ形式の場合は、**Whittaker 関数ないしは一般化 Whittaker 関数を Weyl 群の元で捻ったものの和による寄与があることが分かり、これは実は Jacobi 群上の２乗可積分保型形式の空間の連続スペクトルにより説明される。**このような指摘はこれまでなかったと思われる。この連続スペクトルの概念を援用することで実２次シンプレクティック群の場合について、広いクラスのカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開の理論ができた。例外群 G2 の四元数離散系列表現を生成するカスプ形式については、**Fourier-Jacobi 型球関数が０になるという結果が正しいと仮定すると、Pollack が研究対象としなかった Heisenberg 群の中心が非自明である Fourier-Jacobi 展開の項は、すべて一般化 Whittaker 関数の Weyl 群の捻りで説明されるということになる。**
　以上は非アデール的設定での話であるが、アデール的設定でのカスプ形式の Fourier-Jacobi 展開を次数２のシンプレクティック群の場合で与えた。Jacobi 群のアデール化上の保型表現の理論は Rolf Berndt と Ralf Schmidt の充実した理論があり、これを使ってアデール化されたヤコビ群の離散スペクトルの寄与が説明される。より正確には次数２のシンプレクティック群の既約許容表現の大域的 Fourier-Jacobi 模型の重複度１定理を仮定することで説明される。これは有限素点での重複度１定理は Baruch-Rallis により証明されており、無限素点では平野氏が多くの既約許容表現で証明している。後者の重複度１定理は既存研究で一般的に証明されているのではと考え始めているが、現時点では確認途中で確定的な言い方は控えておく。またこのアデール的設定での Fourier-Jacobi 展開については連続スペクトルの寄与は実は Fourier-Jacobi 展開の Heisenberg 群の中心的指標自明な項全体の Weyl 群と特別なユニポテント元の積の捻りの和として表せるという単純な記述で説明できることが分かった。これは非アデールの場合でも、やや煩雑にはなるが、同様の説明が可能であることを申し添えておく。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 成田宏秋
２．発表標題 Fourier-Jacobi expansion of non-holomorphic real analytic cusp forms on Sp(2,R)
３．学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型形式とL関数の解析的・幾何的・p進的研究」（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 成田宏秋
２．発表標題 Fourier-Jacobi expansion of cusp forms on Sp(2,R)
３．学会等名 第７回京都保型形式研究集会（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 成田宏秋
２．発表標題 Fourier-Jacobi expansion for Sp(2,R)
３．学会等名 愛媛大学代数セミナー（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 成田宏秋
２．発表標題 Automorphic forms generating quaternionic discrete series
３．学会等名 仙台保型形式小研究集会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 成田宏秋
２．発表標題 Automorphic forms generating quaternionic discrete series
３．学会等名 Number theory in Tokyo（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

成田宏秋のホームページ https://www.f.waseda.jp/hnarita/narita.htm

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関