

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03434

研究課題名(和文) 根付き木写像の基礎整備と多重ゼータ値の研究

研究課題名(英文) Fundamentals of rooted tree maps and study on multiple zeta values

研究代表者

田中 立志 (Tanaka, Tatsushi)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：60515196

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：Connes-Kreimerの根付き木Hopf代数に基づいて2018年ごろに定義した根付き木写像は、数論における重要な研究対象の一つである多重ゼータ値と密接に関係する対象であり、本研究においてその基本的な性質を明らかにした。具体的には、根付き木写像の調和積代数における解釈、antipodeの具体表示、根付き木写像の多重L値への拡張、などの成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

根付き木写像は、多重ゼータ値の代数的理論に新たな切り口を与えた。perturbative QFTやFeynman物理学と多重ゼータ値論との関連を示唆する現象の一つとしても、根付き木写像は学術的に興味深い。その純代数的な性質や拡張の可能性に関する本成果は十分に意義がある。

研究成果の概要(英文)：Based on Connes-Kreimer Hopf algebra of rooted trees, rooted tree maps was defined around 2018. They are closely related with multiple zeta values. This research makes some of their fundamentals clear. In particular, we got results on interpretation of rooted tree maps by means of harmonic algebra, explicit representation of antipode maps, and generalization of rooted tree maps applicable to multiple L-values.

研究分野：代数学

キーワード：根付き木写像 多重ゼータ値 多重L値 Hopf代数 調和積代数 補間多重L値

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2017年10月から2018年2月までドイツ・ボンにあるマックスプランク研究所に研究滞在している間に、数理物理方面の文献を読み漁りそこにヒントを得て、根付き木写像を定義した。根付き木写像が多重ゼータ値の間の広い関係式族を記述することなど、いくつかのよい性質を持つことは分かっていたが、この現象の根本原理や、根付き木写像のさらに深い代数的性質などが解明できずにいた。

2. 研究の目的

根付き木写像をより深く理解し代数的な基礎理論を整備すること、根付き木写像に関する純代数的な問いの純代数的な解決を目指す。特に、原始的な根付き木写像の特定や根付き木写像の間の関係式の特定、antipodeの特徴づけを試みる。さらに、根付き木写像の代数的拡張や数理物理的応用を探し、以て多重ゼータ値論へ寄与する。

3. 研究の方法

多重ゼータ値の研究から一旦脱却し、根付き木写像の特徴づけを行う。Feynman 図のなす Hopf 代数への拡張や operadic な解釈、グラフ複体に関する Willwacher の仕事との関連、などを見つけるべく、論文調査、研究集会参加による情報収集、計算実験などを行う。結果として、調和積代数は根付き木写像を理解する手立てとして望外に有効であった。特に、実験的に予想していた antipode の具体表示は、調和積代数を介すことで証明することができた。また、適用対象を多重ゼータ値から多重 L 値へと拡張することを考えることで、根付き木写像の定義を拡張することができた。

4. 研究成果

- (1) 村原英樹(北九州市立大)との共同で、根付き木写像に対応する調和積代数における多項式列を構成し、antipode 写像がある involution に関して元の写像と共役な関係にあることを証明した。これは根付き木写像を考案した当初から実験的に予想していたものである。証明の過程で、調和積代数における新しい等式や性質をいくつか示している。調和積代数は Hopf 代数構造を持つことが以前より知られているが、本研究により、調和積代数には従来のものとは別の Hopf 代数構造が何らかの形で隠れているようであることが分かってきた。また、Connes-Kreimer の根付き木 Hopf 代数はヨーロッパなどで近年よく研究されている。根付き木写像の全体は根付き木全体よりも小さいので、調和積代数も根付き木代数の中に埋め込まれていると見るべきであるが、調和積代数はその広い世界へ何か還元し得るものだろうか。とりわけ、原始的な根付き木は、根付き木写像の間の関係式と密接に関わっているようであることが、Foissy の論文と我々の研究を比較すると見えてくる。
- (2) 若林徳子(大阪電気通信大)との共同で、多重 L 値の関係式を与えるよう、根付き木写像の定義を拡張することに成功した。より厳密には、拡張定義した根付き木写像の antipode 側の写像が多重 L 値の間の関係式を与えるという結果であった。多重ゼータ値のときの構成法・証明と同様ではあるものの、多重 L 値の場合に現れる指標に関するパラメータに依らない性質を見極めるのに苦労した。その後、村原の協力を得て antipode 側ではない根付き木写像が多重 L 値の間の関係式を与えることも証明できている。その証明にあたっては、多重ゼータ値の場合に用いた調和積代数における antipode-like な等式が多重 L 値の場合の調和積代数には成り立たないことが分かり、一段と難しいものがあったが、それをうまく回避でき、目的のものを得ることができている。この村原と若林との共同研究については現在論文投稿中である。
- (3) 元大学院生の伊藤慎也(京都産業大)および若林との共同で、補間多重 L 値というものを新たに導入した。その複シャッフル構造などの代数的諸性質を調べ、一般複シャッフル関係式・Hoffman 関係式・川島関係式を代数的に記述し、ある特殊値に関する結果も得た。この補間多重 L 値は、多重ゼータ値の場合に山本修司により導入された「補間」の概念を多重 L 値に適用したものと見える。補間することで多重 L 値にひとつパラメータがつき、特殊値や関係式など、研究するべき課題が大幅に増えたが、本成果にある代数的定式化はそれらの研究を

強かにバックアップする。また、保形形式との関連についても、多重ゼータ値の場合の Gangl-
金子-Zagier の理論と平行するものが構築できるか、などの課題がある。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Tanaka Tatsushi、Wakabayashi Noriko	4. 巻 240
2. 論文標題 Rooted tree maps for multiple L-values	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 471 ~ 489
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2022.02.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 BACHMANN Henrik、TANAKA Tatsushi	4. 巻 74
2. 論文標題 ROOTED TREE MAPS AND THE KAWASHIMA RELATIONS FOR MULTIPLE ZETA VALUES	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 169 ~ 176
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.74.169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Murahara Hideki、Tanaka Tatsushi	4. 巻 60
2. 論文標題 Algebraic aspects of rooted tree maps	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 123 ~ 139
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-022-00612-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 田中立志
2. 発表標題 根付き木写像と多重ゼータ値, 多重L値
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中立志
2. 発表標題 根付き木写像と多重ゼータ値, 多重L値
3. 学会等名 第13回多重ゼータ研究集会 & 第48回関西多重ゼータ研究会 (共同開催)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田中立志
2. 発表標題 On interpolated multiple L-value
3. 学会等名 RIMS共同研究「解析的整数論とその周辺」
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関