

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03438

研究課題名(和文) ガロア点を用いた射影多様体の分類理論と新展開

研究課題名(英文) Classification theory of projective varieties by Galois points and new developments

研究代表者

深澤 知 (Fukasawa, Satoru)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：20569496

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：10の成果があった。そのうち6つを並べる。(1)「一直線上にない3つのガロア点の存在判定法」の発見(2)「与えられた代数曲線が平面曲線の2点のガロア閉包として実現される判定法」の発見(3)ガロア点研究と有限体上の有理関数のvalue set研究との結びつけ(4)Hermitian曲線のある種のelementary abelian p -coverの自己同型群とガロア点配置決定、種々の性質の解明(5)Artin-Schreier-Mumford曲線およびgeneralized ASM曲線に関する自己同型群とガロア直線配置の決定(6)「ガウス写像が分離的な接的退化空間曲線」の構成

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガロア点やガロア直線は曲線の対称性を表現していると考えられます。本研究においては有限体上で定義された代数曲線について、ガロア点やガロア直線の配置を明らかにしました。有限体上の代数曲線は符号(例：QRコード)の構成に用いられています。ここに、ガロア点理論と符号理論とのつながりが見えます。また、本研究では「ガロア点研究」と「有限体上の(有理)関数研究」を結びつけました。有限体上の関数や有理関数は、有限幾何や暗号理論において研究されています。付随して得られた「ガウス写像が分離的な接的退化曲線の構成」は、Terraciniの1932年の問題にさかのぼり、90年もの問題への貢献となります。

研究成果の概要(英文)：10 results are obtained. Six of them are posed as follows. (1) A criterion for the existence of non-collinear Galois points (2) A criterion for curves being realized as the Galois closures of two points of a plane curve (3) A connection between the study of Galois points and that of rational functions with small value sets over a finite field (4) Determinations of the automorphism group and the arrangement of Galois points, and elucidation of several properties for a certain elementary abelian p -cover of the Hermitian curve (5) Determinations of the automorphism group and the arrangement of Galois lines for the Artin-Schreier-Mumford curve or the generalized ASM curve (6) Construction of tangentially degenerate curves admitting a separable Gauss map

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロア点 自己同型群 Weierstrass点 ガロア群 射影 正標数 準ガロア点 ガロワ点

1. 研究開始当初の背景

1996年、吉原久夫氏(新潟大学)は代数幾何学においてガロア点という新たな概念を導入した:射影平面内の平面曲線 C に対し、平面内の点 P からの射影により誘導される関数体の拡大がガロア拡大であるとき、 P を C のガロア点という。さらにガロア点が曲線の非特異点であるとき「内ガロア点」、曲線の外にあるとき「外ガロア点」と呼ばれる。さらに3次元射影空間内にある直線からの射影を考えることにより、「ガロア直線」が同様に定義される。吉原氏はガロア点がどのような点か説明する際つぎのようにいう:「空間に浮かぶ立方体を想像してください。一般の位置に視点を置いてその立体を眺めると何ら対称性は見えませんが、正方形や正六角形など対称性の高い図形が見える特殊な点があります。ガロア点とはそのような点です。」

ガロア点研究における重要な成果のひとつは「ガロア点の配置によって射影多様体を分類する」という種類の結果がいくつも得られていることである。分類結果を中心として、ガロア点研究において次の3つの進展があった:

- 代数曲線に関する基本的方法の確立:具体的には非特異平面曲線に対して、ガロア点の配置、および最大個数のガロア点をもつ曲線が決定された。(吉原 2001、深澤 2013)
- ガロア点配置による(特異曲線を含めた)代数曲線の分類理論:具体的には、無限根のガロア点をもつ平面曲線が分類され、(それらを除いたときに)ガロア点の個数の上限が与えられた。(深澤-長谷川 2010、深澤 2011、2015)
- ガロア点に付随する群による代数曲線の内在的性質の研究:具体的には「ガロア点2つを伴う双有理埋め込みの存在」判定法が発見された。(深澤 2018) また、2つの外ガロア点に付随する群を用いてフェルマー曲線の特徴づけが与えられた。(深澤-Speziali 2018)

ガロア点研究と他分野との研究が見出され、例えば次の展開があった:

- 自己同型群との関係:具体的には、Stichtenoth と Henn によって分類された自己同型群が最も大きい(正標数の)4種の曲線すべてについて「ガロア点2つを伴う双有理埋め込みの存在」が明らかとなった。(深澤-東根 2018)
- (有限体上の)有理点との関係:具体的には、ガロア点と有理点が一致する平面曲線の例が発見された。(Hermitian 曲線:本間 2006、Ballico-Hefez 曲線:深澤 2013、double-Frobenius nonclassical 曲線:Borges-深澤 2020) また、有理点を多く持ついくつかの代数曲線(例えば Suzuki、Ree、Giulietti-Korchmaros、Skabelund 曲線)について「ガロア点2つを伴う双有理埋め込みの存在」が示された。(深澤 2019、深澤-東根 2018)
- 符号理論との関係:(e)で挙げた例のひとつである Ballico-Hefez 曲線上の有理点を用いた代数幾何符号が計算され、良い符号を呈することが確認された。(深澤-本間-Kim 2012)

以上が概ね、2019年ころの状況であった。

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえて本研究においては、ガロア点を用いた射影多様体の分類理論を推進し、他分野との関係の中から新たな発展を創出すること、の2つを目的とした。特に、「ガロア点の配置による代数曲線の分類理論」をさらに進め、ガロア点と有限数学(有理点、符号理論を含む)との関係をより深く見出すことに重点をおいた。

3. 研究の方法

平面曲線のガロア点については、Weierstrass 点の一般論、応募者の判定法、正標数代数曲線の分岐理論(Hurwitz 公式、different の概念、Deuring-Shafarevich 公式)を用いた。ガロア点は自己同型群と関係があるため、基本的な群論を使った。

2020年度以降はコロナウイルス対応により対面での研究交流が不可能となったが、その分の研究費を、2022年度の研究支援者雇用に充てることができた。研究支援者と議論を行うことにより、証明に関して論理の整理や再現性の確認を十分に行うことができた。

4. 研究成果

(1)「一直線上にない3つのガロア点の存在判定法」の発見(代表者の判定法の一般化、Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 2023、Nihonkai Math. J. 2021)

2016年に「ガロア点2つを伴う平面への双有理埋め込み」判定法が完成した後の早い段階から「ガロア点を3つもつ判定法」の定式化が自然な課題となったが、すぐには解決されなかった。ここで「3つ」の状況は「3点が一直線上にない(三角形をつくる)」場合と「3点が一直線上にある」場合の2つあることに注意する。2019年度の代表者の成果により前者の場合、つまり「一直線上にない3つのガロア点を伴う双有理埋め込みの存在」判定法が理想的な形で得られた。そして実際に、ガロア点を3つもつ平面曲線を新たに発見した。さらに「3つのガロア点の群による三角形への作用」の条件によって、フェルマー曲線が特徴づけられることを示した。「3点が一直線上にある」場合については、ひとつの必要十分条件を提示した。

(2)「与えられた代数曲線が平面曲線の2点のガロア閉包として実現される判定法」の発見(代表者の判定法の一般化、Ann. Mat. Pura Appl. 2022、Comm. Algebra 2022)

代表者による2点のガロア点をもつ判定法に関して、商曲線への一般化は東根一樹氏との共同研究により得られていた。これを基に別の方向性として、射影のガロア閉包への一般化の可能性

について高橋剛氏と議論を行った。以上の経緯からさらに東根氏と高橋氏と議論を深め、両氏との共同研究により、2点のガロア閉包を実現する判定法を完成することができた。判定法の条件を満たす「標数零の例」を見つけることには難しさが残っていたが、標数零の例の構成にも代表者がはじめて成功した。

(3) ガロア点研究と有限体上の有理関数の value set 研究との結びつけ (Hiroshima Math. J. 掲載決定済み)

有限体 F_q 上の多項式に対して F_q の元を代入して得られる値全体の集合を value set という。また、無限遠点まで考えることにより、有理関数の value set を考えることができる。2つのガロア点をもつ (有限体上定義された) 平面曲線は、2つの有理関数による関係式の「既約成分」として実現されることを代表者が明らかにした。2つのガロア点による群が半直積を生成するとき、最近の Bartoli, Borges, Quoos の結果と合わせて、これら2つのうち1つの有理関数の value set がとても小さいことがわかった。さらに2つのガロア点が外ガロア点であるときは、2つの有理関数を多項式にとることができる。つまり、多項式 $f(x)$, $g(y)$ が存在して、もとの代数曲線は $f(x)-g(y)=0$ 型の曲線の既約成分である。これにより、多項式 $f(x)$, $g(y)$ に条件を課してガロア点研究を行うことが可能となった。その第一歩として、2つの外ガロア点に付随する $f(x)$, $g(y)$ が Minimal Value Set Polynomial かつ value set が等しいときに Borges の結果を利用して、もとの曲線が Frobenius nonclassical 曲線であることを証明した。

(4) Hermitian 曲線のある種の elementary abelian p-cover の自己同型群、ガロア点配置決定、種々の性質の解明 (Math. Z. 2022)

Herivelto Borges 氏との共同研究により、このような曲線に対し、自己同型群を完全決定し、ガロア点配置を明らかにした。他にも p-rank, Frobenius nonclassicality, arc といった重要な性質を調べ上げた。この曲線においては p-rank は正であり、種数 g を無限大にもっていったときに自己同型群の位数も無限に大きくなる。外ガロア点も q^2-q 個存在し、たくさんのガロア点をもつ新しい例を提案したことにもなっている。

(5) Artin-Schreier-Mumford 曲線および generalized ASM 曲線に関する自己同型群とガロア直線配置の決定 (Finite Fields Appl. 2021, Geom. Dedicata 2022)

Artin-Schreier-Mumford 曲線 (以下、ASM 曲線) を 3 次元射影空間に (ある意味自然に) 埋め込んだときの、ガロア直線をすべて決定した。これまでガロア直線がすべて決定された例は Giulietti-Korchmaros 曲線のみであったため、それに続く例を提供することに成功した。Montanucci-Zini により与えられた generalized ASM 曲線の自己同型群決定について、初等的な証明を与え、標数 2 でも同様の結果が成り立つことを証明した。Montanucci-Zini の証明には標数が 3 以上であることが仮定されていた。応用として generalized ASM 曲線を 3 次元射影空間に埋め込んだときのガロア直線をすべて決定した。

(6) Hermitian 曲線の 2 次 subcover のガロア直線

標数が奇数のとき、Hermitian 曲線の 2 次 subcover を自然に 3 次元射影空間に埋め込んだ際の、ガロア直線配置を完全決定した。付随して、3 次元射影空間内の点からの射影を考察することにより、この曲線の 3 種の平面モデルのガロア点配置を確定した。この 3 つの平面モデルは、ガロア点を 3 つ以上もつ平面曲線の新しい例となっている。

(7) 非特異平面曲線に対する準ガロア点の個数の確定

ガロア点を一般化した「準ガロア点」に関して、非特異平面曲線に対してその個数を調査した。特に、準ガロア点に付随する群の位数が 3 以上のときに、準ガロア点の個数の可能性を確定した。これは三浦敬氏、高橋剛氏との共同研究である。

(8) 2 つのガロア点に付随する群が半直積を生成するときの平面曲線の分類

曲線上の非特異ガロア点と外のガロア点に付随する 2 つの群が半直積を生成する場合に、平面曲線を分類した。また、2 つのガロア点が外ガロア点の場合には、かつて誤りのあった議論を修正した。この修正において、曲線 $x^m+y^{2m}=1$ が「ガロア点を 2 つもつ平面モデル」を 2 種類もつことを明らかにした。2 つの外ガロア点に関する研究は、Pietro Speziali 氏との共同研究である。

(9) 対称群や交代群を 2 つの外ガロア点の群にもつ平面有理曲線の発見

正標数において、これら性質をもつ平面有理曲線の例を 9 種発見した。これは脇克志氏との共同研究である。

(10) 「ガウス写像が分離的な接的退化空間曲線」の構成 (Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 2022)

代数曲線上の自己同型に対して、曲線上の一般点の像がその点の接線上にあるとき、その自己同型は non-classical であるという。この non-classical 自己同型に注目し、「ガウス写像が分離的な接的退化曲線」の新しい例を発見した。この種の例は 1994 年に Esteves-Homma によりたった一例が知られているのみであり、27 年ぶりの新発見となった。また、この研究は Terracini が 1932 年に提起した「(標数零において)代数的な接的退化曲線は存在するか？」への貢献となる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Fukasawa Satoru	4. 巻 33
2. 論文標題 New examples of tangentially degenerate curves	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.	6. 最初と最後の頁 959 ~ 966
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/RLM/994	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fukasawa Satoru	4. 巻 149
2. 論文標題 Algebraic curves admitting non-collinear Galois points	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova	6. 最初と最後の頁 183 ~ 190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/rsmup/114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Borges Herivelto, Fukasawa Satoru	4. 巻 302
2. 論文標題 An elementary abelian p -cover of the Hermitian curve with many automorphisms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 695 ~ 706
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-022-03083-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fukasawa Satoru	4. 巻 50
2. 論文標題 Examples of plane curves admitting the same Galois closure for two projections	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4188 ~ 4190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2057524	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukasawa Satoru、Higashine Kazuki、Takahashi Takeshi	4. 巻 201
2. 論文標題 Algebraic curves admitting the same Galois closure for two projections	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 2055 ~ 2061
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-022-01191-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukasawa Satoru	4. 巻 216
2. 論文標題 Automorphism group, Galois points and lines of the generalized Artin-Schreier-Mumford curve	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-022-00679-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoru Fukasawa	4. 巻 75
2. 論文標題 Galois lines for the Artin-Schreier-Mumford curve	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2021.101894	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoru Fukasawa	4. 巻 32
2. 論文標題 Algebraic curves with collinear Galois points	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 71-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukasawa Satoru, Waki Katsushi	4. 巻 -
2. 論文標題 Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Finite Fields and their Applications: Proceedings of the 14th International Conference on Finite Fields and their Applications, Vancouver, June 3-7, 2019	6. 最初と最後の頁 181 ~ 188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/9783110621730-012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukasawa Satoru, Higashine Kazuki	4. 巻 225
2. 論文標題 A birational embedding with two Galois points for quotient curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2020.106525	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Borges Herivelto, Fukasawa Satoru	4. 巻 61
2. 論文標題 Galois points for double-Frobenius nonclassical curves	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2019.101579	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 Galois points and rational functions with small value sets
3. 学会等名 誤り訂正符号と超平面配置の関係とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Satoru Fukasawa
2. 発表標題 Algebraic curves admitting the same Galois closure for two projections
3. 学会等名 Branched coverings, Degenerations, and Related Topics 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 Galois points and rational functions with small value sets
3. 学会等名 2022早稲田整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 代数曲線に対するガロア点を2つもつ判定法とその応用
3. 学会等名 日本数学会東北支部会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 Artin-Schreier-Mumford 曲線の自己同型群とガロア直線
3. 学会等名 代数幾何ミニワークショップ「ガロア点、有限体、代数曲線」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Satoru Fukasawa
2. 発表標題 A birational embedding with two Galois points for quotient curves
3. 学会等名 The 14th International Conference on Finite Fields and their Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 Algebraic curves admitting non-collinear Galois points
3. 学会等名 Workshop on Galois point and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 代数曲線に対するガロア点を2つもつ判定法とその拡張, 応用
3. 学会等名 都の西北 代数幾何学シンポジウム 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深澤 知
2. 発表標題 代数曲線に対するガロア点を2つもつ判定法とその拡張, 応用
3. 学会等名 第17回代数曲線論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

深澤研究室
<https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ブラジル	サンパウロ大学	カンピーナス大学		